Ilija A. Šapkarev

TRI PRIMEDBE O INTEGRACIJI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA POMOĆU DIFERENCIRANJA

1. U *Zborniku matematičkih problema* II (Beograd 1958, str. 139) od *D. S. Mitrinovića* ukazano je da se jednačina

$$xy'' - 2y' + xy = 0, \tag{1. 1}$$

diferenciranjem svodi na jednačinu četvrtog reda sa konstantnim koeficijentima. Koristeći tu činjenicu, može se odrediti opšte rešenje jednačine (1. 1) i ono glasi:

$$y = A(\cos x + x\sin x) + B(\sin x - x\cos x). \tag{1. 2}$$

Na pomenutom mestu je takođe ukazano da se taj metod integracije može primeniti i na jednačinu:

$$xy^{(k)} - ky^{(k-1)} + xy = 0 \qquad (k \text{ prirodan broj}). \tag{1. 3}$$

Može se pokazati da svako rešenje jednačine (1. 3) zadovoljava takođe i jednačinu

$$y^{(2k)} + 2y^{(k)} + y = 0. \tag{1. 4}$$

Na osnovu toga može se naći opšte rešenje jednačine (1. 3) koje glasi

$$y = \sum_{n=0}^{k-1-\left[\frac{k}{2}\right]} \left\{ \exp\left(x\cos\frac{2n+1}{k}\pi\right) \right. \tag{1. 5}$$

$$\times \left\{ C_{2n+1}\left[\cos\left(x\sin\frac{2n+1}{k}\pi\right) - \frac{x}{k-1}\cos\left(\frac{2n+1}{k}\pi + x\sin\frac{2n+1}{k}\pi\right)\right] \right.$$

$$\left.\left. + C_{2n+2}\left[\sin\left(x\sin\frac{2n+1}{k}\pi\right) - \frac{x}{k-1}\sin\left(\frac{2n+1}{k}\pi + x\sin\frac{2n+1}{k}\pi\right)\right]\right\}\right\}.$$

Pokažimo da se i jednačine

$$(ax+b)\,y^{(k)} - aky^{(k-1)} \pm a^k(ax+b)\,y = 0 \tag{1. 6}$$

mogu rešiti navedenim metodom.

Zbilja, smenom $ax+b=t$ jednačine (1. 6) se transformišu u

(1. 7) $$t\frac{d^k y}{dt^k}-k\frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}}\pm ty=0.$$

Prva od ovih jednačina (sa znakom plus ispred ty) je tipa (1. 3), a druga se može rešiti na isti način.

Metod svođenja na jednačinu sa konstantnim koeficijentima može se primeniti i na jednačinu

(1. 8) $$xy''-2y'+nxy+2\frac{y}{x}=0,$$

jer se smenom $y'-2y/x=z$ dobija jednačina

(1. 9) $$xz''-2z'+nxz=0.$$

2. Posmatrajmo sada jednačine

(2. 1) $$xy''-4y'-xy=0,$$

(2. 2) $$xy''-6y'+xy=0,$$

na koje smo naišli u ranije navedenoj knjizi (str. 140).

Može se pokazati da svako rešenje jednačine (2. 1) odnosno (2. 2) zadovoljava jednačinu

(2. 3) $$y^{(6)}-3y^{(4)}+3y''-y=0,$$

odnosno

(2. 4) $$y^{(9)}+3y^{(6)}+3y^{(3)}+y=0.$$

Koristeći opšte rešenje dveju poslednjih jednačina, nalazimo opšta rešenja jednačina (2. 1) i (2. 2):

(2. 5) $$y=C_1e^x\left(1-x+\frac{x^2}{3}\right)+C_2e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{3}\right),$$

odnosno

(2. 6) $$y=Ae^{-x}\left(1+\frac{3}{5}x+\frac{1}{10}x^2\right)$$
$$+Be^{\frac{x}{2}}\left\{\left(1-\frac{3}{10}x-\frac{1}{20}x^2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{x\sqrt{3}}{20}(6-x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$$
$$+Ce^{\frac{x}{2}}\left\{\left(1-\frac{3}{10}x-\frac{1}{20}x^2\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{x\sqrt{3}}{20}(6-x)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}.$$

U opštem slučaju, pokazuje se da svako rešenje jednačine

$$xy^{(k)}-2\,ky^{(k-1)}+xy=0, \tag{2. 7}$$

zadovoljava jednačinu

$$y^{(3k)}+3\,y^{(2k)}+3\,y^{(k)}+y=0. \tag{2. 8}$$

Koristeći opšte rešenje ove jednačine, nalazimo da je opšte rešenje jednačine (2. 7) dato formulom:

$$\begin{aligned} y = \sum_{n=0}^{k-1-\left[\frac{k}{2}\right]} & \left\{\exp\left(x\cos\frac{2n+1}{k}\pi\right)\right. \\ & \times\left\{C_{2n+1}\cos\left(x\sin\frac{2n+1}{k}\pi\right)+C_{2n+2}\sin\left(x\sin\frac{2n+1}{k}\pi\right)\right. \\ & +\left[C_{2n+1}\cos\left(\frac{2n+1}{k}\pi+x\sin\frac{2n+1}{k}\pi\right)\right. \\ & \left.\left.\left.+C_{2n+2}\sin\left(\frac{2n+1}{k}\pi+x\sin\frac{2n+1}{k}\pi\right)\right]\frac{x}{2k-1}\left(\frac{x}{k-1}-3\right)\right\}\right\}. \end{aligned} \tag{2. 9}$$

Još opštije jednačine

$$(ax+b)\,y^{(k)}-2\,aky^{(k-1)}\pm a^k\,(ax+b)\,y=0 \tag{2. 9}$$

smenom $ax+b=t$ dobijaju oblik

$$t\,\frac{d^k y}{dt^k}-2\,k\,\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}\pm ty=0, \tag{2. 10}$$

te se i one mogu rešiti navedenim metodom.

Jednačina

$$xy''-4\,y'+nxy+4\,\frac{y}{x}=0 \tag{2. 11}$$

može se rešiti metodom diferenciranja, jer smenom $y'-4\,y/x=z$ dobija oblik

$$xz''-4\,z'+nxz=0. \tag{2. 12}$$

3. Pošto smo rešili jednačine oblika

$$xy^{(k)} - ky^{(k-1)} \pm xy = 0,$$

$$xy^{(k)} - 2ky^{(k-1)} \pm xy = 0,$$

postavlja se pitanje, za koje vrednosti n jednačina

$$xy^{(k)} - ny^{(k-1)} + axy = 0, \tag{3. 1}$$

ima osobinu da svako njeno rešenje zadovoljava jednu linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima reda $n+k$.

Diferencirajmo uzastopce n puta jednačinu (3. 1):

$$\begin{aligned}
&xy^{(k)} - ny^{(k-1)} + axy = 0,\\
&xy^{(k+1)} - (n-1)\,y^{(k)} + axy' + ay = 0,\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&xy^{(2k)} - (n-k)\,y^{(2k-1)} + axy^{(k)} + aky^{(k-1)} = 0,\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&xy^{(n-k)} - 2ky^{(n-k-1)} + axy^{(n-2k)} + (n-2k)\,ay^{(n-2k-1)} = 0,\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&xy^{(n)} - ky^{(n-1)} + axy^{(n-k)} + (n-k)\,ay^{(n-k-1)} = 0,\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&xy^{(n+k)} - axy^{(n)} + nay^{(n-1)} = 0.
\end{aligned}$$

Da bi se poslednja od ovih jednačina svela na jednačinu sa konstantnim koeficijentima, izvodi $y^{(n-1)}$, $y^{(n-k-1)}$, ... , $y^{(n-sk-1)}$ ($s=0$, 1, 2, ...) treba da se izraze pomoću $y^{(k-1)}$, tj. treba da bude $n-sk-1=k-1$, odnosno $n=(s+1)\,k$, tj. n treba da bude deljivo sa k ($n=mk$, m prirodan broj).

U tom slučaju jednačina (3. 1) ima oblik

$$xy^{(k)} - mky^{(k-1)} + axy = 0 \qquad (m,\ k \text{ prirodni brojevi}). \tag{3. 2}$$

Diferencirajući jednačinu (3. 2), dobija se

$$
\begin{aligned}
&xy^{(k)}-mky^{(k-1)}+axy=0,\\
&\vdots\\
&xy^{(2k)}-(m-1)\,ky^{(2k-1)}+axy^{(k)}+aky^{(k-1)}=0,\\
&\vdots\\
&xy^{(mk)}-ky^{(mk-1)}+axy^{(mk-k)}+(m-1)\,aky^{(mk-k-1)}=0,\\
&\vdots\\
&xy^{(mk+k)}+axy^{(mk)}+mkay^{(mk-1)}=0.
\end{aligned}
\tag{3. 3}
$$

Iz prvih m jednačina ovog skupa, nalazimo

$$
y^{(mk-1)}=\frac{x}{k}\left\{y^{(mk)}+\frac{m+1}{2!}\,ay^{(mk-k)}+\frac{(m-1)\,(m+1)}{3!}\,a^2\,y^{(mk-2k)}+\cdots\right.
$$
$$
\left.+\frac{(m+1)\,(m-1)\,(m-2)\cdots 1}{(m+1)!}\,a^m\,y\right\}.
$$

Ako ovaj izraz zamenimo u poslednjoj jednačini skupa (3. 3), dobićemo jednačinu:

$$
\sum_{\nu=0}^{m+1}\binom{m+1}{\nu}a^{\nu}\,y^{(mk+k-\nu k)}=0. \tag{3. 4}
$$

Karakteristični polinom ove jednačine je $(a+r^k)^m$, te je njeno opšte rešenje dato sa:

$$
y=\sum_{i=1}^{k}\left\{e^{r_i x}\sum_{j=0}^{m}C_{jk+i}\,x^j\right\}, \tag{3. 5}
$$

gde su C_{jk+i} integracione konstante.

Koristeći rešenje (3. 5), može se odrediti i opšte rešenje jednačine (3. 2).

4. U knjizi: E. Kamke: *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen* (Leipzig, 1959, S. 539) ukazano je na druge načine rešavanja jednačine (3. 1).