$$C_2=b\beta\gamma-\alpha\beta b-\alpha\gamma b,$$

$$C_3=2\beta a+a\gamma-4\alpha^2-4\alpha a-\alpha\beta-\alpha\gamma,$$

$$C_4=\beta b-2\alpha b,$$

$$D_1=-\alpha\beta\gamma\,(\alpha+a),$$

$$D_2=-\alpha\beta\gamma b,$$

$$D_3=-2\alpha\,(\alpha+a)\,(\beta+\gamma)-\alpha\beta\,(\alpha+a)-\alpha\beta\gamma,$$

$$D_4=-2\alpha\beta b-\alpha\gamma b,$$

$$D_5=-2\alpha\,(\alpha+a)-\alpha\beta.$$

За $b\neq 0$, со елеминацијата на параметрите, a, b, α, β, γ од овие равенки помеѓу константите A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 ги добиваме релациите:

$$A_2^2\,D_1+B_2D_2-A_1A_2D_2=0,$$

$$A_2C_2-A_2^2\,B_1+A_1A_2-B_2^2=0,$$

$$(2A_1A_2-A_2B_3-2B_2+C_4)\;(A_2B_3-B_2-C_4)-A_2D_4+A_2^2\,D_5=0,$$

$$(4A_1A_2-2B_3-4B_2+3C_4)\,(B_2-C_4)-A_2\;(C_2-D_4)=0,$$

$$(2A_1A_2-A_2B_3-2B_2+C_4)\;(A_1A_2-B_2)\,(2A_1A_2-A_2B_3-B_2+C_4)+A_2^3\,C_1$$
$$+(A_1A_2-A_2B_3-B_2+C_4)\,(A_2B_3-2A_1A_2+3B_2-2C_4)\;(4A_1A_2-2A_2B_3B_2+3C_4)=0,$$

$$(2A_1A_2-A_2B_3-2B_2+C_4)\;(6A_1A_2-A_2B_3-5B_2+C_4)+A_2^2\,C_3$$
$$+(A_1A_2-A_2B_3-B_2+C_4)\;(6A_1A_2-3A_2B_3-5B_2+4C_4)=0,$$

$$(2A_1A_2-A_2B_3-2B_2+C_4)\,(4A_1A_22A_2B_3-4B_2+3C_4)\;(A_2B_3-2A_1A_2+3B_2-2C_4)$$
$$+A_2^2\,D_2=0,$$

$$2A_1A_2-A_2B_3-2B_2+C_4)\,(4A_1A_2-2A_2B_3-4B_2+3C_4)\,(A_2B_3-A_1A_2+2B_2-2C_4)=0,$$

$$A_2^2\,D_4+(2A_1A_2-A_2B_3-2B_2+C_4)\;(6A_1A_2-3A_2B_3-5B_2+4C_4)=0,$$

што претставуваат услови за интеграбилност на равенката (8) со квадратури.

За $b=0$ од (9) следува

$$A_1=a+\beta+\gamma,$$

$$B_1=a\beta+a\gamma-\alpha^2-\alpha a+\beta\gamma,$$

$$B_3=2a+\beta-\alpha,$$

$$C_1=a\beta\gamma-\alpha(\alpha+a)\;(\beta+\gamma),$$

$$C_3 = 2\beta a + a\gamma - 4\alpha^2 - 4a\alpha - \alpha\beta - \alpha\gamma,$$
$$D_1 = -\alpha\beta\gamma\,(\alpha + a),$$
$$D_3 = -2\alpha\,(\alpha + a)\,(\beta + \gamma) - \alpha\beta\,(\alpha + a) - \alpha\beta\gamma,$$
$$D_5 = -2\alpha\,(\alpha + a) - \alpha\beta$$

од каде што, со елиминацијата на β и γ ги добиваме релациите

$$3\alpha^2 + B_3\alpha + D_5 = 0,$$
$$6a^2 - 4B_3 a + B_1 + C_3 - (A_1 - B_3)\,B_3 - 2D_5 = 0,$$
$$[B_3\,(B_3 - 3A_1) + 3(B_1 + C_3) - 6D_5]\alpha + D_5(B_3 - 3A_1) + 3D_3 = 0,$$
$$3(B_1 - C_3) - 3(A_1 - B_3)B_3 + 2D_5 - (6A_1 - 8B_3)\alpha + (12\alpha + 6B_3 - 6A_1)a = 0,$$
$$2a^3 + a^2(2A_1 - 3B_3 - 4\alpha) + a(B_3 - A_1)B_3 + 2B_3\alpha] + \alpha^2 A_1 + C_1 = 0,$$
$$(\alpha^2 + a\alpha)\,(B_3 - 2a + \alpha)\,(A_1 - B_3 + a - \alpha) + D_1 = 0.$$

Од овие релации, ако се елиминираат параметрите a и α, ќе се добијат врски меѓу константите A_1, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, D_5 што ќе претставуваат услови за интеграбилност на равенката (8) со квадратури.

На крајот да забележиме и тоа дека овие критериуми за интеграбилност на равенките (7) и (8) можат да бидат појачани ако P, Q, R и S се изберат на друг начин. Секако претставува интерес добивањето критериуми за интеграбилност на други диференцијални равенки од четврти ред, користејќи ја равенката (3).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Илија А. Шапкарев, Über die Integration der linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung in geschlossener Form, Glasnik matematički 5 (25) (1970), 63 — 66.

Ilija A. Šapkarev

ÜBER DIE INTEGRATION DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN GESCHLOSSENER FORM

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird gezeigt dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) erhalten werden kann wenn die Differentialgleichung (2) benützt wird.

Weiter wird gezeigt dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung (3) mit (4) gegeben ist, wo $\delta\,(x)$ eine beliebige particuläre Lösung der Differentialgleichung (5) ist.

Auch wird gezeigt dass die Bedingungen für die Integration der Differentialgleichungen (7) und (8) in geschlossener Form der Differentialgleichung (3) erhalten werden können.