ÜBER DIE INVARIANTEN RICCATISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Ilija A. Šapkarev

I

In [1] hat D. S. Mitrinović bewiesen, dass die Riccatische Differentialgleichung

$$y' + y^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\theta'''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 \tag{1}$$

mit $\theta = \theta(x) \neq \text{const}$, $\alpha = \text{const}\ (\neq 0)$ durch die Substitution

$$y = -\frac{1}{2}\,\frac{\theta''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)\frac{1}{y_1 + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\theta''}{\theta'} - \dfrac{\theta'}{\theta}}, \tag{2}$$

wo y_1 eine neue unbekannte Funktion von x ist, sich selbst in sich transformiert.

In [2] hat I. A. Šapkarev bewiesen, dass die Riccatische Differentialgleichung

$$y' = f(x)\,y^2 + g(x)\,y + h(x) \tag{3}$$

durch die Substitution

$$y = \frac{Q(x)\,z + R(x)}{S(x)\,z + T(x)} \qquad (RS - QT)\,S \neq 0, \tag{4}$$

sich selbst in sich transformiert, wenn die folgenden Bedingungen bestehen

$$Q + T = 0$$

oder

$$S(Q + T)\,R' + [S'(Q + T) - 2S(Q + T)']\,R + (QT' - Q'T)(T - Q) = 0. \tag{5}$$

In [3] hat D. S. Dimitrovski bewiesen, dass die Riccatische Differentialgleichung

$$(6) \qquad y' = -\frac{E}{C} h y^2 + \left(\frac{C'E - CE'}{2CE} - \frac{h}{E}\right) y + h$$

mit

$$(7) \qquad C(x) = \frac{E^2}{2} + \lambda E^3 exp\left(6 \int \frac{h}{E} dx\right),$$

(E und h sind beliebige Funktionen, λ = const), durch die Substitution

$$(8) \qquad y = \frac{-(1/2) E z^2 + C}{z^2 + Ez}$$

sich selbst in sich trasformiert.

In [4] hat L. Čakalov mehrere Ergebnisse über Riccatische Gleichungen bekommen und darunter befinden sich auch die folgenden:

Die 3 Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$y^3 + b_1(x) y^2 + b_2(x) y + b_3(x) = 0,$$

wo b_1, b_2, b_3 beliebige Funktionen von x sind, sind dann und nur dann partikuläre Integrale der Gleichung

$$y' + M(x) y + N(x) = 0,$$

wenn die Relation

$$\frac{(2 b_1^3 - 9 b_1 b_2 + 27 b_3)^2}{(b_1^2 - 3 b_2)^3} = \text{const}$$

besteht.

Die 4 Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$y^4 + a_1(x) y^3 + a_2(x) y^2 + a_3(x) y + a_4(x) = 0$$

sind dann und nur dann partikuläre Integrale einer Riccatischen Differentialgleichung, wenn ihre Koeffizienten durch die Relation

$$\frac{(27 a_1^2 a_4 - 9 a_1 a_2 a_3 + 2 a_2^3 - 72 a_2 a_4 + 27 a_3^2)^2}{(3 a_1 a_3 - a_2^2 - 12 a_4)^3} = \text{const}$$

verbunden sind.

In dieser Arbait zeigen wîr, dass die Riccatische Gleichung

$$y' + f(x)\, y^2 + g(x)\, y + h(x) = 0 \tag{a}$$

mit

$$f(x) = \frac{\delta \gamma' - \delta' \gamma}{\alpha \delta - \beta \gamma}, \quad h(x) = \frac{\alpha' \beta - \alpha \beta'}{\alpha \delta - \beta \gamma},$$

$$g(x) = \frac{\beta' \gamma - \beta \gamma' + \alpha \delta' - \alpha' \delta}{\alpha \delta - \beta \gamma}$$

durch die Substitution

$$\frac{\beta - \delta y}{\gamma y - \alpha} = \varphi \left(\frac{\beta - \delta z}{\gamma z - \alpha} \right), \tag{b}$$

wo z eine neue unbekannte Funktion ist, und φ eine beliebige Funktion von $(\beta - \delta z) / (\gamma z - \alpha)$ ist, sich selbst in sich transformiert und dass die Lösungen der Gleichung

$$\frac{\beta - \delta y}{\gamma y - \alpha} = \varphi \left(\frac{\beta - \delta y}{\gamma y - \alpha} \right) \tag{c}$$

ihre Integrale sind.

Ferner zeigen wir, dass die Ergebnisse, die in dieser Arbeit zitiert werden, können auch auf dieser Weise bekommen werden.

II

Bekanntlich ist das allgemeine Integral der Riccatischen Gleichung (a)

$$y = \frac{\varphi(C)\, \alpha(x) + \beta(x)}{\varphi(C)\, \gamma(x) + \delta(x)}. \tag{d}$$

Wenn man $\varphi\,(C)$ durch Differenzieren eliminiert, bekommt man die Gleichung (a). Wenn wir statt $\varphi(C)$ C setzen, wo $\varphi(C)$ eine beliebige Funktion von C ist, erhalten wir die Funktion

$$z = \frac{C\, \alpha(x) + \beta(x)}{C\, \gamma(x) + \delta(x)} \tag{e}$$

als allgemeines Integral der Glelchung (a).

Von (d) und (e) folgt unmittelbar

$$\text{(f)} \qquad \frac{\beta - \delta y}{\gamma y - \alpha} = \varphi\left(\frac{\beta - \delta z}{\gamma z - \alpha}\right).$$

Die Relation (f) stellt eine Substitution dar, mit der die Gleichung (a) sich selbst in sich transformiert.

Wenn man in der Relation (f) $y = z$ setzt, bekommt man die Gleichung

$$\text{(g)} \qquad \frac{\beta - \delta y}{\gamma y - \alpha} = \varphi\left(\frac{\beta - \delta y}{\gamma y - \alpha}\right).$$

Da der Ausdruck

$$\frac{\beta - \delta y}{\gamma y - \alpha} = \text{const}$$

ist, folgt unmittelbar, dass jede Lösung der Gleichung (g) auch ein partikuläres Integral der Gleichung (a) darstellt.

1. Wenn wir

$$\delta \gamma' - \delta' \gamma = \alpha \delta - \beta \gamma,$$

$$\beta' \gamma - \beta \gamma' + \alpha \delta' - \alpha' \delta = 0,$$

$$\gamma = 1$$

setzen, bekommen wir

$$\text{(1. 1)} \qquad \alpha = -\frac{1}{2} \frac{\delta''}{\delta'}, \qquad \beta = \frac{2\delta'^2 - \delta \delta''}{2\delta'},$$

$$\frac{\alpha' \beta - \alpha \beta'}{\alpha \delta - \beta \gamma} = \frac{1}{2} \frac{\delta'''}{\delta} - \frac{3}{4}\left(\frac{\delta''}{\delta'}\right)^2.$$

Dann nimmt die Differentialgleichung (a) die Gestalt

$$\text{(1. 2)} \qquad y' + y^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{\delta''}{\delta'}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\delta'''}{\delta'}$$

an.

Aus der Relation (f), für $\varphi\left(\frac{\beta - \delta z}{\gamma z - \alpha}\right) = a\left(\frac{\gamma z - \alpha}{\beta - \delta z}\right) + b$, mit $a = \text{const}$ $(\neq 0)$, $b = \text{const}$, bekommen wir

$$y = \frac{Az + B}{z + C}, \tag{1. 3}$$

wobei

$$A = \frac{a\alpha - \beta\delta - b\alpha\delta}{a - b\delta - \delta^2},$$

$$B = \frac{\beta^2 - a\alpha^2 + b\alpha\beta}{a - b\delta - \delta^2},$$

$$C = \frac{\beta\delta - a\alpha^2 + b\alpha\beta}{a - b\delta - \delta^2}.$$

Die letzten Ausdrücken werden in Verbindung mit (1. 1)

$$\begin{aligned} A &= \frac{\delta\delta'}{\delta^2 + b\delta - a} - \frac{1}{2}\frac{\delta''}{\delta'}, \\ B &= \frac{b\delta'' + 2\delta\delta'' - 2\delta'^2}{2(\delta^2 + b\delta - a)} - \frac{\delta''^2}{4\delta'^2}, \\ C &= \frac{1}{2}\frac{\delta''}{\delta'} - \frac{\delta'(\delta + b)}{\delta^2 + b\delta - a}. \end{aligned} \tag{1. 4}$$

Wenn die Substitution (1. 3) mit der Substitution (2) identisch sein soll, müssen die Relationen

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}, \\ B &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2, \\ C &= \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \frac{\theta'}{\theta} \end{aligned} \tag{1. 5}$$

bestehen.

Aus der ersten und dritten Relation von (1. 4) und (1. 5) folgt

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{b\delta'}{\delta^2 + b\delta - a},$$

woraus man bekommt

$$\frac{\theta''}{\theta} = \frac{b\delta''}{\delta^2 + b\delta - a} - \frac{2b\delta\delta'^2}{(\delta^2 + b\delta - a)^2},$$

$$\frac{\theta''}{\theta'} = \frac{\delta''}{\delta'} - \frac{2\,\delta\,\delta'}{\delta^2 + b\,\delta - a}$$

und mit Hilfe der zweiten Relation von (1. 4) und (1. 5) ergibt sich

$$a - \alpha\,b^2 = 0.$$

2. Aus (4) und (1. 3), für $\gamma = 1$, erhält man

$$Q = a\,\alpha - \beta\,\delta - b\,\alpha\,\delta,$$

$$R = \beta^2 - a\,\alpha^2 + b\,\alpha\,\beta,$$

$$S = a - \delta^2 - b\,\delta,$$

$$T = \beta\,\delta - a\,\alpha + b\,\beta.$$

Aus der ersten und letzten dieser Gleichungen folgen

$$b\,S\,\alpha = (Q + T)\,\delta + b\,Q,$$

$$b\,S\,\beta = a\,(Q + T) - b\,T\,\delta.$$

Für $b = 0$ erhält man

$$Q + T = 0,$$

und für $b \neq 0$, durch Elimination von α, β, δ bekommt man die Relation

$$\frac{RS - QT}{(Q + T)^2} = \frac{a}{b^2} = \text{const},$$

die durch Differenzieren gerade die Relation (5) liefert.

3. Nun nehmen wir

$$\varphi\left(\frac{\beta - \delta\,z}{\gamma\,z - \alpha}\right) = a\left(\frac{\gamma\,z - \alpha}{\beta - \delta\,z}\right)^2 + b$$

und erhalten

(3. 1) $$y = \frac{A_0\,z^2 + A_1\,z + A_2}{A_3\,z^2 + A_4\,z + A_5},$$

wobei

$$A_0 = \beta\,\delta^2 + a\,\alpha\,\gamma^2 + b\,\alpha\,\delta^2,$$

$$A_1 = -2(\beta^2\delta + a\alpha^2\gamma + b\alpha\beta\delta),$$

$$A_2 = \beta^3 + a\alpha^3 + b\alpha\beta^2,$$

$$A_3 = a\gamma^3 + \delta^3 + b\gamma\delta^2,$$

$$A_4 = -2(\beta\delta^2 + a\alpha\gamma^2 + b\beta\gamma\delta),$$

$$A_5 = a\alpha^2\gamma + \beta^2\delta + b\beta^2\gamma.$$

Wenn die Substitution (3. 1) mit der Substitution (8) identisch sein soll, müssen die folgenden Bedingungen

$$2A_0 + A_4 = 0,\ A_1 = A_5 = 0,\ A_4 / A_3 = E,\ \hat{A}_2 / A_3 = C$$

bestehen. Die letzten Relationen sind erfüllt, wenn

$$b = 0,\ \delta = -a\alpha^2\gamma / \beta^2 \tag{3. 2}$$

gilt.

Weiter erhalten wir

$$C = \frac{\beta^6}{a\gamma^3(\beta^3 - a\alpha^3)},\quad E = -\frac{2\alpha\beta^3}{\gamma}\frac{1}{\beta^3 - a\alpha^3}. \tag{3. 3}$$

Durch Elimination von β, für $\gamma = 1$, bekommen wir

$$E^2\alpha^2 + 4C\alpha + 2CE = 0. \tag{3. 4}$$

Wenn wir δ und β aus (3. 2) und (3. 3) in

$$h = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha\delta - \beta}$$

einzetzen, erhalten wir die Relation

$$\alpha' + \left(\frac{CE' - C'E}{2CE} - 3\frac{\mathrm{h}}{E}\right)\alpha - 3\mathrm{h} = 0. \tag{3. 5}$$

Durch Elimination von α aus (3. 4) und (3. 5) erhält man gerade die Relation (7).

4. Jetzt nehmen wir

$$\gamma = 0,\ \delta = 1,$$

dann ergibt sich, dass die Differentialgleichung

$$y' - \frac{\alpha'}{\alpha} y + \frac{\alpha \beta' - \alpha' \beta}{\alpha} = 0$$

mit der Substitution

$$\frac{y - \beta}{\alpha} = \varphi\left(\frac{z - \beta}{\alpha}\right)$$

sich selbst in sich transformiert und dass die Lösungen der Gleichung

$$\frac{y - \beta}{\alpha} = \varphi\left(\frac{y - \beta}{\alpha}\right)$$

ihre partikuläre Integrale darstellen.

Wenn wir speziell

$$\varphi\left(\frac{y - \beta}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{y - \beta}\right)^2 + a \frac{\alpha}{y - \beta} + b,$$

wo a und b beliebige Konstante sind, annehmen, dann erhalten wir die Gleichung

$$y^3 + A y^2 + B y + C = 0$$

wobei

$$A = -3\beta - b\alpha,$$

$$B = 3\beta^2 - a\alpha^2 + 2b\alpha\beta,$$

$$C = a\alpha^2\beta - b\alpha\beta^2 - \alpha^3 - \beta^3.$$

Durch die Elimination von β aus der ersten und zweiten bzw aus der ersten und dritten Gleichung, erhalten wir die Relationen

$$(b^2 + 3a)\alpha^2 + (3B - A^2) = 0,$$

$$(2b^3 + 9ab + 27)\alpha^3 + 2A^3 - 9AB + 27C = 0.$$

Durch Elimination von α aus diesen Gleichungen bekommt man die Relation

$$(b^2 + 3a)^3 (27C + 2A^3 - 9AB)^2 + (2b^3 + 9ab + 27)^2 (3B - A^2)^3 = 0.$$

Für $3a + b^2 = 0$ erhält man

$$A^2 - 3B = 0$$

und für das $3a + b^2 \neq 0$ folgt

$$\frac{(27C + 2A^3 - 9AB)^2}{(A^2 - 3B)^2} = \text{const.}$$

Es seien die 4 Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$y^4 + a_1(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_3(x)y + a_4(x) = 0 \tag{4. 1}$$

Lösungen der Riccatischen Gleichung

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x). \tag{4. 2}$$

Durch die Substitution

$$y = y_1 + \frac{1}{u},$$

wo y_1 eine beliebige Lösung der Gleichung (4. 1) und u eine neue unbekannte Funktion ist, entsteht die Gleichung (4. 1)

$$u^3 + b_1u^2 + b_2u + b_3 = 0, \tag{4. 3}$$

wobei

$$b_1 = \frac{6y_1^2 + 3a_1y_1 + a_2}{4y_1^3 + 3a_1y_1^2 + 2a_2y_1 + a_3},$$

$$b_2 = \frac{4y_1 + a_1}{4y_1^3 + 3a_1y_1^2 + 2a_2y_1 + a_3},$$

$$b_3 = \frac{1}{4y_1^3 + 3a_1y_1^2 + 2a_2y_1 + a_3},$$

ist, und die Differentialgleichung (4. 2) geht über die

$$u' = (2Py_1 + Q)u + P. \tag{4. 4}$$

Die 3 Wurzeln der Gleichung (4. 3) sind dann und nur dann Integrale der Gleichung (4. 4), wenn die Relation

$$(b^2 + 3a)^3(27b_3 + 2b_1^3 - 9b_1b_2)^2 + (2b^3 + 9ab + 27)^2(3b_2 - b_1^2)^3 = 0$$

besteht.

Durch einfache Rechnung erhalten wir, dass

$$3\,b_2 - b_1^2 = \frac{3\,a_1\,a_3 - a_2^2 - 12\,a_4}{(4\,y_1^3 + 3\,a_1\,y_1^2 + 2\,a_2\,y_1 + a_3)^2}\,,$$

$$27\,b_3 + 2\,b_1^3 - 9\,b_1\,b_2 = \frac{27\,a_1^2\,a_4 - 9\,a_1\,a_2\,a_3 + 2\,a_2^3 - 72\,a_2\,a_4 + 27\,a_3^2}{(4\,y_1^3 + 3\,a_1\,y_1^2 + 2\,a_2\,y_1 + a_3)^3}$$

ist.

Damit folgt, dass die 4 Wurzeln der Gleichung (4. 1) dann und nur dann Lösungen der Gleichung (4. 2) sind, wenn die Relation

$$(b^2 + 3\,a)^3\,(27\,a_1^2\,a_4 - 9\,a_1\,a_2\,a_3 + 2\,a_2^3 - 72\,a_2\,a_4 + 27\,a_3^2)^2$$
$$+ (2\,b^3 + 9\,a\,b + 27)^2\,(3\,a_1\,a_3 - a_2^2 - 12\,a_4)^3 = 0$$

besteht.

Für $b^2 + 3\,a = 0$ bekommt man

$$3\,a_1\,a_3 - a_2^2 - 12\,a_4 = 0,$$

und für das $b^2 - 3\,a \neq 0$ bekommt man

$$\frac{(27\,a_1^2\,a_4 - 9\,a_1\,a_2\,a_3 + 2\,a_2^3 - 72\,a_2\,a_4 + 27\,a_3^2)^2}{(3\,a_1\,a_3 - a_2^2 - 12\,a_4)^3} = \text{const.}$$

LITERATUR

[1] D. S. Mitrinović, Sur une classe d'équations de Riccati invariantes relativement à un changement de fonction, Annuaire de faculté de Phylosophie de l'Université de Skopje (Section des sciences naturelles), 2 (1949), 168—186.

[2] I. A. Šapkarev, Sur des équations différentielles transformables en elles-mêmes par un changement de fonction, Bulletin de la Société des mathematiciens et physiciens de la R. S. de Serbie, XV Beograd (1963), 21—27.

[3] D. S. Dimitrovski, Sur la transformation de l'équation différentielle de Riccati en elle-même, Matematički vesnik, Beograd, 2 (1965), 148—151.

[4] L. Čakalov, Über die Riccatischen Differentialgleichungen, Jahrbuch der Universität sveti Kliment Ochridski in Sofia, physico-mathematischen Facultät. Bd. XXXVII, 1940/41 B. L. (Mathematik und Physik).

ЗА ИНВАРИЈАНТНИ RICCATI ЕВИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Илија А. Шајкарев

Содржина

Се покажува дека Riccati-евата диференцијална равенка (*a*), со смената (*b*), се трансформира сама во себе. Користејќи ја оваа особина се утврдува дека решенијата на равенката (*c*) претставуваат партикуларни интеграли на равенката (*a*). Понатака се покажува дека резултатите добиени во наведените трудови [1], [2], [3] и [4] можат да се добијат и со помош на особината равенката (*a*) да се трансформира сама во себе, ако за функцијата φ се земат некои погодно избрани специјални видови.