MATHEMATICA BALKANICA
4. 111 (1974) 583—586

ŠAPKAREV, ILIJA A. (Skopje, Jugoslavija)

POLYNOME VOM GRAD *n* ALS VOLLSTÄNDIGE INTEGRALE DER LINEAREN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER ORDNUNG *n**

1. Es sei die lineare partielle Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} a_{n-k-i,\,i}\frac{\partial^{n-k} z}{\partial x^{n-k-i}\,\partial y^{i}}=0 \tag{1}$$

gegeben, wo $a_{n-k-i,\,i}=a_{n-k-i,\,i}(x, y)$ $(k=0, 1, \ldots, n;\ i=0, 1, \ldots, n-k)$ differenzierbare Funktionen von x und y sind.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass das vollständige Integral der Differentialgleichung (1) ein Polynom von x und y vom Grad n sein kann, wenn ihre Koeffizienten $a_{n-k-i,\,i}=P_{n-k-i,\,i}(x, y)$ $(k=0, 1, \ldots, n;\ i=0.\ 1, \ldots, n-k)$ Polynome von x und y vom Grad $n-k$ sind (der grösste Grad von x ist $n-k-i$ und von y ist i) und wenn sie die Relationen

$$P_{n-k-i,\,i}=(-1)^{k}\frac{\partial^{k} P_{n-i,\,i}}{\partial x^{k}},\quad (k=0, 1, \ldots, n,\quad i=0, 1, \ldots, n-k) \tag{2}$$

$$\frac{\partial P_{n-k+1-i,\,i-1}}{\partial x}=\frac{\partial P_{n-k-i,\,i}}{\partial y}\ \text{erfüllen.} \tag{3}$$

Es gilt auch umgekehrt, das heisst, dass das vollständige Integral der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^{k}\frac{\partial^{k} P_{n-i,\,i}}{\partial x^{k}}\,\frac{\partial^{n-k} z}{\partial x^{n-k-i}\,\partial y^{i}}=0 \tag{4}$$

deren Koeffizienten $P_{n-i,\,i}$ die Relationen

$$\frac{\partial P_{n+1-i,\,i-1}}{\partial x}=\frac{\partial P_{n-i,\,i}}{\partial y}\,(i=0, 1, \ldots, n)\ \text{erfüllen, das Polynom} \tag{5}$$

$$z=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} B_{n-k-i,\,i}\left[x^{n-k-i}y^{i}-(n-k-i)!\ i!\,\frac{A_{n-k-i,\,i}}{A_{0,\,0}}\right]\ \text{sein kann.} \tag{6}$$

2. Zu diesem Zweck differenzieren wir die Differentialgleichung (1) zuerst nach x und danach nach y und bekommen wir die folgenden Differentialgleichungen:

---

* Dargelegt auf dem 5. Balkan-Mathematiker-Kongress (Beograd, 24—30.06. 1974)

$$(7)\quad \sum_{i=0}^{n} a_{n-i,i}\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n+1-i}\partial y^{i}}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\left(\frac{\partial a_{n-k-i,i}}{\partial x}+a_{n-k-1-i,i}\right)\frac{\partial^{n-k}z}{\partial x^{n-k-i}\partial y^{i}}=0,$$

$$(8)\quad \sum_{i=0}^{n} a_{n-i,i}\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n-i}\partial y^{i+1}}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\left(\frac{\partial a_{n-k-i,i}}{\partial y}+a_{n-k-i,i-1}\right)\frac{\partial^{n-k}z}{\partial x^{n-k-i}\partial y^{i}}=0$$
$$(a_{i,-1}=0,\quad a_{-1,k}=0;\quad i,\,k=0,\,1,\,\ldots,\,n).$$

Sei das Polynom $z=P_n(x, y)$ vom Grad n ein vollständiges Integral der Differentialgleichung (1). In diesen Fall hat das vollständige Integral der Gleichung (1) $n(n+3)/2$ Polynomlösungen als partikuläre Integrale. Da die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen (7) und (8) enthalten mehr als $n(n+3)/2$ Polynomlösungen als partikuläre Integrale und da für das Polynom $z=P_n(x, y)$ ist

$$\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n+1-i}\partial y^{i}}=0,\quad \frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n-i}\partial y^{i+1}}=0\qquad (i=0,\,1,\,\ldots,\,n),$$

folgt es, dass die Differentialgleichungen

$$(9)\qquad \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\left(\frac{\partial a_{n-k-i,i}}{\partial x}+a_{n-k-1-i,i}\right)\frac{\partial^{n-k}z}{\partial x^{n-k-i}\partial y^{i}}=0,$$

$$(10)\qquad \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\left(\frac{\partial a_{n-k-i,i}}{\partial y}+a_{n-k-i,i-1}\right)\frac{\partial^{n-k}z}{\partial x^{n-k-i}\partial y^{i}}=0$$

identisch ausgefüllt sein werden, wenn ihre Koeffizienten die Relationen

$$(11)\qquad \frac{\partial a_{n-k-i,i}}{\partial x}+a_{n-k-1-i,i}=0,\qquad \frac{\partial a_{n-k-i,i}}{\partial y}+a_{n-k-i,i-1}=0$$

$$(12)\qquad (k=0,\,1,\,\ldots,\,n;\quad i=0,1,\,\ldots,n-k)\ \text{erfüllen.}$$

Aus diesen Relationen folgt es unmittelbar, dass die Funktionen

$$a_{n-k-i,i}(x, y)=P_{n-k-i,i}(x, y)\ (k=0,\,1,\,\ldots,\,n;\quad i=0,\,1,\,\ldots,\,n-k)$$

Polynome von x und y vom Grad $n-k$ sind (der Grad von x ist $n-k-i$ und von y ist i). Von den Relationen (11) und (12) können die Relationen (2) und (3) sehr leicht bekommen werden.

Wenn wir die Differentialgleichung (4) zuerst nach x und danach nach y differenzieren, nach (5), erhalten wir die Differentialgleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} P_{n-i,i}\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n+1-i}\partial y^{i}}=0,\quad \sum_{i=0}^{n} P_{n-i,i}\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n-i}\partial y^{i+1}}=0.$$

Von diesen Relationen kann man folgern, dass die Differentialglichund (4) ein Polynom vom Grad n als vollständiges Integral hat.

Wenn dass Polynom

$$z=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} B_{n-k-i,i}\, x^{n-k-i} y^{i}$$

sowie seine Ableitungen in die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} P_{n-k-i,i}\frac{\partial^{n-k} z}{\partial x^{n-k-i}\,\partial y^{i}}=0$$

deren Koeffizienten $P_{n-k-i,i}$ die Relationen (2) und (3) erfüllen, eingesetzt werden und danacq wenn man das freie Glied des Polynoms $P_{n-k-i,i}$ mit $A_{n-k-i,i}\,(k=0,1,\ldots,n;\ i=0,1,\ldots,n-k)$ bezeichnet, wird dann $B_{0,0}$ von der Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i)!\,i!\,B_{n-i,i}A_{n-i,i}+\sum_{i=0}^{n-1}(n-1-i)!\,i!\,B_{n-1-i,i}A_{n-1-i,i}+$$

$$+\cdots+\sum_{i=0}^{1}(1-i)!\,i!\,B_{1-i,i}A_{1-i,i}+B_{0,0}A_{0,0}=0 \quad \text{durch}$$

$$B_{0,0}=-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-k}(n\,k\,i)!\,i!\,B_{n-k-i,i}\frac{A_{n-k-i,i}}{A_{0,0}} \quad \text{dargestellt.}$$

Also, ist das vollständige Integral der Gleichung (4) durch (6) gegeben. Der Fall, wenn $B_{0,0}=0$ ist, wurde von D. S. MITRINOVIĆ [1] bearbeitet.

Für $n=1, 2, 3$ folgt, dass die partiellen Differentialgleichungen

$$1^\circ \quad (A_{0,0}x-A_{1,0})\frac{\partial z}{\partial x}+(A_{0,0}y-A_{0,1})\frac{\partial z}{\partial y}-A_{0,0}z=0,$$

$$2^\circ \quad \left(A_{0,0}\frac{x^2}{2}-A_{1,0}x+A_{2,0}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(A_{0,0}xy-A_{0,1}x-A_{1,0}y+A_{1,1})\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+$$

$$+\left(A_{0,0}\frac{y^2}{2}-A_{0,1}y+A_{0,2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-(A_{0,0}x-A_{1,0})\frac{\partial z}{\partial x}-(A_{0,0}y-A_{0,1})\frac{\partial z}{\partial y}+A_{0,0}z=0,$$

$$3^\circ \quad \left(A_{0,0}\frac{x^3}{6}-A_{1,0}\frac{x^2}{2}+A_{2,0}x-A_{3,0}\right)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+$$

$$+\left(A_{0,0}\frac{x^2 y}{2}-A_{0,1}\frac{x^2}{2}-A_{1,0}xy+A_{1,1}x+A_{2,0}y-A_{2,1}\right)\frac{\partial^3 z}{\partial^2\,\partial y}+$$

$$+\left(A_{0,0}\frac{xy^2}{2}-A_{0,1}xy-A_{1,0}\frac{y^2}{2}+A_{0,2}x+A_{1,1}y-A_{1,2}\right)\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}+$$

$$+\left(A_{0,0}\frac{y^3}{6}-A_{0,1}\frac{y^2}{2}+A_{0,2}y-A_{0,3}\right)\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}-$$

$$-\left(A_{0,0}\frac{x^2}{2}-A_{1,0}\,x+A_{2,0}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(A_{0,0}\,xy-A_{0,1}\,x-A_{1,0}\,y+A_{1,1})\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-$$

$$-\left(A_{0,0}\frac{y^2}{2}-A_{0,1}\,y+A_{0,2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+(A_{0,0}\,x-A_{1,0})\frac{\partial z}{\partial x}+(A_{0,0}\,y-A_{0,1})\frac{\partial z}{\partial y}-A_{0,0}\,z=0$$

der Reihe nach, die folgenden vollständigen Integrale haben:

$$1^\circ \quad z=B_{1,0}\left(x-\frac{A_{1,0}}{A_{0,0}}\right)+B_{0,1}\left(y-\frac{A_{0,1}}{A_{0,0}}\right),$$

$$2^\circ \quad z=B_{1,0}\left(x-\frac{A_{1,0}}{A_{0,0}}\right)+B_{0,1}\left(y-\frac{A_{0,1}}{A_{0,0}}\right)+B_{2,0}\left(x^2-2\frac{A_{2,0}}{A_{0,0}}\right)+$$

$$+B_{2,1}\left(xy-\frac{A_{1,1}}{A_{0,0}}\right)+B_{0,2}\left(y^2-2\frac{A_{0,2}}{A_{0,0}}\right),$$

$$3^\circ \quad z=B_{1,0}\left(x-\frac{A_{1,0}}{A_{0,0}}\right)+B_{0,1}\left(y-\frac{A_{0,1}}{A_{0,0}}\right)+B_{2,0}\left(x^2-2\frac{A_{2,0}}{A_{0,0}}\right)+$$

$$+B_{1,1}\left(xy-\frac{A_{1,1}}{A_{0,0}}\right)+B_{0,2}\left(y^2-2\frac{A_{0,2}}{A_{0,0}}\right)+B_{3,0}\left(x^3-6\frac{A_{3,0}}{A_{0,0}}\right)+$$

$$+B_{2,1}\left(x^2 y-2\frac{A_{2,1}}{A_{0,0}}\right)+B_{1,2}\left(xy^2-2\frac{A_{1,2}}{A_{0,0}}\right)+B_{0,3}\left(y^3-6\frac{A_{0,3}}{A_{0,0}}\right).$$

Literatur

[1] Mitrinović, D. S., *O jednoj linearnoj parcijalnoj jednačini*, Glasnik matematičko, fizički i astronomski 1 (1946), 168—182.

(Došlo 28. 6. 1974.)

Šapkarev Ilija A.
Elektro-mašinski fakultet
Skopje (Jugoslavija)