INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES ET L' ANALYSE QUALITATIVE D' ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Milorad Bertolino (Belgrade)

§ 1

L'analyse qualitative d' équations différentielles est étroitement liée aux inégalités différentielles-notre premier pas sera (dans un grand nombre de cas) de résoudre l' inégalité $f(x, y) > 0$ ou $f(x, y) < 0$, pour déterminer dans le plan XOY, les régions de croissance et de décroissance des solutions de l' équation différentielle $y' = f(x, y)$, tandis que la solution $y = \varphi(x)$ de l' équation $f(x, y) = 0$ nous donne l' ensemble de points stationnaires. Le théorème fondamental de Tchapliguine qui, partant de l' inégalité $f_1(x, y) < f(x, y) < f_2(x, y)$ conduit jusqu' à l' inégalité $y_1(x) < y(x) < y_2(x)$ concernant les solutions des équations $y' = f_1, y' = f, y' = f_2$ $(y_1(x_0) = y(x_0) = y_2(x_0) = y_0)$ permet de remplacer l' étude qualitative de l' équation $y' = f(x, y)$ qui est, peut être, difficile à considérer, par l' étude des équations comparatives $y' = f_1(x, y), y' = f_2(x, y)$ dont les solutions encadrent la solution en question ([5], [6], [17], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [37], [38], [39], [40], [44]).

Nous avons montré (voir [44]) que la priorité concernant le théorème fondamental de Tchapliguine (formulé en 1919) appartient cependant à mathématicien serbe Mihailo (Michel) Petrovitch qui l' a publié en 1899. Ce fait ne diminue pas essentiellement le grand rôle de Tchapliguine, qui a donné sa célèbre méthode de l' encadrement de la solution en question par une suite infinie de courbes, qui a traité profondément le cas des équations linéaires et non-linéaires de l' ordre arbitraire ainsi que des systèmes d' équations différentielles.

Il faut souligner que les inégalités différentielles de Tchapliguine donnèrent l' inspiration à un grand nombre de mathématiciens, qui les généralisèrent dans des directions diverses, avec l' hypothèse d'unicité ou sans celle-ci. Par exemple, l' école cracovienne (T. Ważewski, J. Szarski et bien d'autres) et encore Hukuhara, Kamke, Mikusiński a traité les systèmes du premier ordre sous les hypothèses bien générales y comptant les notions des intégrales supérieures et inférieures ainsi que les dérivées généralisées et les diverses courbes de comparaison. Les monographies considérables de Jacek Szarski ([10]) et de Wolfgang Walter ([16]) nous offrent une vue contemporaine dans ce cercle d' idées. Pour consulter la littérature à ce propos il faut voir les travaux [9], [10], [14], [15], [16].

L' essor principal la théorie (tchapliguinienne) obtint dans Union Sovietique, où, parmi un grand nombre de mathématiciens nous ne citerons que les suivants: N. N. Lusin, B. N. Petrov, B. N. Babkin. N. V. Azbelev, L. B. Caljuk, N. A. Kaščeev, K. V. Zadiraka, S. N. Slugin etc. La limite d' application est bien étudiée. Les conditions nécessaires et suffisantes dans le cas linéaire sont liées à la non-négativité de la fonction de Cauchy. Le cas non-linéaire est considéré d' une façon approfondie. Le domaine d' application est bien élargi (les équations aux dérivées partielles, les équations intégrales, les équations intégro-différentielles). La théorie des espaces semi-ordonnés est intervenue et on a obtenu bien de résultats intéressants dans la théorie des opérateurs (voir [17], [40]).

Le mathématicien serbe Michel Petrovitch (voir [1], [2], [3], [4], [24]) a beaucoup contribué à l' application des inégalités différentielles dans le domaine d'analyse qualitative. Dans beaucoup de cas particuliers il a donné des analyses subtiles du comportement des courbes intégrales, combinant l' analyse géométrique avec les considérations analytiques. Nous ne citerons que quelques équations:

$$y^2 + y'^2 = f(x), \quad y' = \prod_{i=1}^{n} (y - \varphi_i(x)), \quad y'' = f(x)\, y$$

parmi un grand nombre d' autres, qui ont exercé une influence particulière sur notre travail. Ces résultats donnent les estimations des solutions dans les intervalles finis, mais, ce qui est le plus important, pour $x \to +\infty$, dans les structures bien différentes des champs des directions des solutions. Nous sommes en train d' étudier systématiquement le lieu définitif de sa contribution à l' ànalyse qualitative d' équations différentielles.

Les inégalités différentielles sont visibles dans l' application du théoréme de rétracte du à Tadeusz Ważewski (voir [7], [8],). T. Ważewski a utilisé la notion fertile de rétracte, due à K. Borsuk, pour donner plusieurs théorèmes bien généraux et applicables dans l' analyse qualitative. Nous ne citerons qu' un parmi ces résultats:

Soit donné le systéme $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$ où les fonctions $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ sont réelles dans un ensemble ouvert Ω et par tout point de Ω passe une intégrale unique du système. L' ensemble ω est ouvert et $\omega \subset \Omega$. Soit S l' ensemble de sortie des solutions de ω dans Ω et supposons que S soit l' ensemble de sortie stricte. Soit encore Z un ensemble $Z \subset \omega \cup S$, où $Z \cap S$ est un rétracte de S et $Z \cap S$ n' est pas un rétracte de Z. Alors, il existe au moins un point $P_0 \in Z - S$ tel que Demi $(+) J(P_0) \subset \omega$ où Demi $(+) J(P_0)$ signifie toute la demi-intégrale droite partant de P_0 et prolongée jusqu'au plus possible.

La construction des ensembles ω et S offre beaucoup de possibilités pour l' application d' inégalités différentielles.

Il faut remarquer que tout un groupe de mathématiciens polonais a complété les applications de la théorie de Ważewski dans la théorie de l' analyse qualitative (S. Łojasiewicz, Z. Mykołajska, Z. Szmydt, K. Tatarkyewicz [11], [12], [13], [22] et bien d' autres).

A. D. Miškis et J. M. Rabinovič ont montré (voir [23]), que le mathématicien sovietique Piers Bohl était un des prédecesseurs de la théorie de Ważewski, mais sans la notion de rétracte et d' un point de vue visiblement moins général. T. Pejović est considéré aussi comme un des prédecesseurs, avec son alternative: „au moins une solution bornée" — „toutes les solutions bornées" paraissant dans ces travaux où l'on applique la méthode d' approximations successives pour obtenir les conclusions concernant des solutions bornées ([18], [19], [20], [21]).

§ 2

Dans l' introdruction exposée nous avons donné les sources principales de notre travail dans le domaine de l'analyse qualitative d' équations différentielles, où les inégalités différentielles font une partie considérable. Nous donnerons maintenant un aperçu sur nos propres études et résultats.

Il est bien connu que, dans l' analyse qualitative, l' équation

$$y' = \varphi(x, y) + \psi(x, y) \tag{1}$$

est presque toujours remplacée par l' équation

$$y' = \varphi(x, y) \tag{2}$$

sous l' hypothèse que $\psi(x, y)$ est si petite en comparaison de $\varphi(x, y)$ que cette circonstance (ainsi que les hypothèses supplémentaires) permet de remplacer les solutions de (1) par les solutions de (2). L' équation (2) est donnée, dans une grande majorité de cas, sous la forme $y' = a(x)y$. La linéarisation provient de la représentation du deuxiéme membre de l' équation par la série de Taylor, où l'on ne prend en considération que la partie linéaire. Le cas linéaire est le plus simple et il fut bien étudié. L' application large du calcul matriciel provient de cette linéarisation.

Les autres cas ne sont pas, cependant sans int'rêt. Ils peuvent être même plus faciles dans les cas particuliers. Évidemment, chaque équation $y' = \psi(x, y)$ peut être écrite sous la forme $y' = a(x)y + \psi(x, y) - a(x)y$ c' ést à dire des équations données dans une forme où le membre $a(x)y$ ne figure pas, ne doivent pas être obligatoirement plus générales que celles contenant le membre en question. Nous avons étudié, en général, les cas où le membre $a(x)y$ ne figure pas essentiellement, donnant cependant aussi quelques résultats relatifs à la forme habituelle.

Dans l'exposé suivant nous ne pourrons pas donner beaucoup de détails sur les méthodes utilisées, qui sont soit les procédés convenables à la situation particulière de l' équation considérée, soit l' application des théories mentionnées dans l' introduction.

*

Nous avons étudié ([32], [33], [34]) les équations du type

$$y' = \varphi(x) y^n + \psi(x, y)$$

sous les hypothèses diverses sur $\psi(x, y)$, où n est un nombre naturel (pair ou impair, ce qui donnait les résultats souvent essentiellement différents). On a appliqué la méthode de rétracte, mais souvent l' encadrement par les équations de comparaison de Tchapliguine des types $y' = c_1 y^n + c_2$, $y' = c_1 y^n + c_2 y$, $y' = \varphi(x) y^n + c_2$, $y' = \varphi(x) y^n + c_2 y$; c_1, c_2 — les constantes. Les résultats concernent les solutions bornées pour $x \to +\infty$, ou les solutions tendant vers les limites fixes pour $x \to +\infty$. Dans le cas dernier il y a des résultats présentant la stabilité au sens de Ljapunov. Les résultats son élargis dans une certaine mesure en cas $y' = r(x, y) + s(x, y)$ où la forme analytique des fonctions r, s n' est pas donnée, mais les hypothéses sur r, s sont telles que cette forme n' a pas d' importance.

Dans cette partie de résultats le rôle fondamental appartient au signe du membre $\varphi(x) y^n$, mais aussi, dans quelques cas, au $\psi(x, y)$. Dans les résultats qui suivront il y aura aussi de telles situations où le signe d' un membre détermine globalement le comportement des solutions. Il y a, cependant, bien d' autres situations, où la considération est plus compliquée et la structure du champ des directions ne permet pas de dire que seulement un membre soit décisif.

Les résultats en question donnent „au moins une solution bornée", „une classe de solutions bornées", „toutes les solutions bornées".

Traitant les systèmes, nous nous sommes bornés aux types:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(t) x_i^{l_i} + \sigma_i(t, x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_q) \quad i = 1, \ldots, p$$

$$\frac{dy_j}{dt} = \psi_j(t) y_j^{k_j} + \tau_j(t, x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_q) \quad j = 1, \ldots, q$$

permettant bien de former les ensembles ω et S (voir la méthode de rétracte) des façon differérentes et d' obtenir les classes plus ou moins riches de solutions bornées pour $t \to +\infty$.

Quelques résultats représentent les modifications des résultats de T. Pejović (voir [18], [19], [20], [21]) concernant les équations

$$y' = a(x) y + f(x) + \varphi(x, y)$$

$$y' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} y + f(x) + \psi(x, y)$$

et de K. Tatarkyewicz concernant les équations semblables pour trouver les solutions bornées par l' application directe des rétractes ([22]).

Une série de résultats (voir [35], [36], considérant les variantes de l' équation

$$\prod_{i=1}^{n} (y - \varphi_i(x))$$

n' a pas donné les généralisations, mais, au contraire, il faudrait, sous les hypothèses plus aigües, obtenir les informations plus détaillées sur les solutions (il s'agissait toujours des solutions bornées pour $x \to +\infty$ ou tendant vers les limites fixes, où l'on a employé au lieu des „tuyaux" ω (propres à la méthode de rétracte) rectilignes aussi les „tuyaux" curvilignes bien encadrant au moins une solution bornée dont la limite devient évidente).

L' équation d' Abel de deuxiéme espèce nous a donné la possibilité d' encadrer es solutions de cette équation

$$(y + g(x))\, y' = f_2(x)\, y^2 + f_1(x)\, y + f_0(x)$$

par les solutions des équations linéaires

$$y' = f_2(x)\, y - \varepsilon, \; y' = f_2(x)\, y \qquad (\varepsilon > 0)$$

dans un domaine dépendant de ε, se diminuant en général avec celui-ci. Le théorème fondamental de Tchapliguine fut utilisé. La méthode fut facilement élargie aux diverses variantes des équations du type

$$y' = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i(x)\, y^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)\, y^i}$$

avec les équations de comparaison du type

$$y' = \varphi(x)\, y^k - \varepsilon$$
$$y' = \varphi(x)\, y^k$$

avec les hypothèses différentes sur m, n et sur les fonctions bornées figurant au deuxième membre de l' équation. Le nombre m, n' étant pas toujours plus grand que n nous avons dépassé donc la forme $y' = \varphi(x)\, y^n + \psi(x, y)$ à laquelle on réduisait souvent le traitement du problème (voir [37], [39]).

Enfin, dans ce cercle d' idées nous sommes arrivés jusqu'àu type

$$y' = \frac{\prod\limits_{j \in A} (y - \varphi_j(x))^{\alpha_j}}{\prod\limits_{i \in B} (y - \varphi_i(x))^{\alpha_i}}; \; i \neq j$$

A, B étant deux permutations des nombres naturels sans eléments communs, telles qu'on a $A \cup B = \{1, 2, . . , m\}$; $A \cap B = \varnothing$, où α_i, α_j sont les nombres naturels. Les fonctions $y = \varphi_i(x)$ annulent le dénominateur, ce qui complique la situation dans une certaine mesure. $\varphi_k(x)$ supposées bornées, en donnant une presque complète discussion par rapport à la position mutuelle des fonctions $\varphi_k(x)$ et par rapport aux possibilités concernant α_k, nous avons présenté dans une forme en géneral définitive le tableau qualitative de la derniére équation, introduisant une classification de solutions désignées par les symboles

$$USB,\ CRB,\ CSB,\ \underline{CSB},\ \overline{CSB},\ \underline{\overline{CSB}},\ CRB^*$$

correspondants aux classes de solutions essentiellement présentes dans le cas de cette équation. On offre ici la possibilté des solutions non-prolongeables ainsi que des classes de solutions bornées limitées au-dessus et au-dessous et par deux solutions bornées dont la position peut être déterminée d' une façon assez précise. Voir [41].

*

Comme nous l' avons déjà souligné, on peut trouver, parmi les solutions bornées mentionnées en cadre de nos résultats de telles tendant vers les limites fixes pour $x \to \infty$. La plupart des solutions en question sont, ce qu'on peut facilement démontrer, stables dans le sens de Ljapunov. Il y en a, cependant, qui ne le sont pas, mais dont la qualité de rester bornées nous donne une impression proche à la stabilité. Pour systématiser de telles solutions, nous avons introduit „la solution approximative presque stable" (voir [43]). La solution approximative presque stable ne doit pas, évidemment, être une vraie solution de l' équation donnée; elle peut être une fonction $\varphi(t)$ arbitraire, mais telle qu' il existe un $\varepsilon > 0$ (pas „pour chaque ε") tel qu' on a $|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ pour $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ et $t \geqslant t_0$. Cette notion est proche aux systèmes dissipatifs (voir [28]) et à la stabilité téchnique ([27]). On peut trouver de telles solutions approximatives presque stables parmi les courbes $y = \varphi(x)$ obtenues des équations $f(x, y) = 0$, $f(x, y)$ étant le deuxième membre de l' équation $y' = f(x, y)$ („les lieux géométriques de points stationnaires"). Nous avons construit plusieurs exemples de sorte indiquée. Ces problèmes sont proches à ceux au petit paramétre, où, dans le cas du petit parametre μ

$$\mu \frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

la solution approximative est donnée par l'équation $f(x, t) = 0$.

*

Partant de la derniére notion, nous avons fait (voir [45]) un plan plus large. La région $\Omega(x, y)$ est dite „zone d' influence qualitative" de la fonction $\varphi(x)$, si l' on peut déduire, partant de la propriété P de $\varphi(x)$, que toutes les solutions de $y'=F(x, y, \varphi(x))$ appartenant à Ω, jouissent de la même propriété. Les solutions approximatives presque stables que nous avons introduites ont une telle zone d' influence, avec la propriété P d' un sens distantiel.

Parmi un grand nombre d' exemples nous soulignerons le cas de l' équation

$$y^m + y'^n = f(x)$$

(m, n les nombres naturels, $f(x)$ continue pour $x \geqslant x_0$), où le rôle de $\varphi(x)$ joue la fonction $y = \sqrt[m]{f(x)}$. Sous les hypothèses différentes sur $\sqrt[m]{f(x)}$, ayant la signification de P (1^0 tend vers $+\infty$; 2^0 monotone, croissante, tend vers $+\infty$; 3^0 bornée; 4^0 monotone, croissante, tand vers $c \neq 0, \infty$; 5^0 monotone, décroissante, tend vers $c \neq 0, \infty$; 6^0 tend vers 0; 7^0 monotone, décroissante, tend vers 0 — „tend" toujours pour $x \to +\infty$), prenant en considération m, n pairs, impairs, un pair et l' autre impair, nous avons démontré que, dans un nombre considérable de cas, il existe une classe de solutions, appartenant à Ω, jouissant de la même propriété $1^0 - 7^0$. *L'* équation devient, pour $m = n = 2$ l' équation connue, étudiée par M. Petrović et, d' un autre point de vue, par T. Pejović et D. S. Mitrinović (voir [24], [25], [26]).

*

Nous avons considéré aussi l' équation linéaire non-homogène (voir 30], [38])

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

au point de vue de l' inégalité de Tchapliguine. Il y a de critères suffisants différents pour déterminer la limite de validité des inégalités de Tchapliguine, qui sont toujors intéressants, quoique les conditions suffisantes et nécessaires sont données. Un de ces critères provenant de Tchapliguine, lui même, fut la continuité au moins d'une solution de l' équation auxiliaire de Riccati

$$k' + k^2 - a(x)\,k - a'(x) + b(x) = 0.$$

Partant de cette équation, mais aussi de l' équation plus générale

$$k' + k^2 + a(x)\,k + b(x) = 0$$

(équivalente à la précédente dans le cas où $a'(x)$ existe), nous avons cherché les cas où cette limite de validité (ou la limite d' application) est infinie. Nous avons considéré le cas le plus général de l' équation donnée, mais aussi les cas où manquent les membres. D'autre côté, la méthode de rétracte fut utilisée pour établir l' existence de la solution continue et prolongeable de l' équation de Riccati en question. Dans quelques cas nous avons trouvé les courbes auxiliaires encadrant la solution inconnue, et, partant de leur comportement, nous avons donné la conclusion sur le comportement de la solution. Il y avait des cas où toutes les trois équations sont intégrables par les quadratures. Appliquant donc l' inégalité de Tchapliguine ainsi que la quadrature, nous obtenons une source d' inégalités fonctionnelles qui ne sont pas toujours banales. N' ayant pas assez de temps pour citer particulierèment les résultats publiés, nous ne citerons que quelques équations chez lesquelles nous avons obtenu soit l' estimation des solutions dans un intervalle fini, soit leur comportement pour $x \rightarrow +\infty$.

a) L' équation hypergéométrique dégénérée)

$$xy'' + (b-x)\,y' - ay = 0, \quad a = const,\ b = const$$

b n' étant pas un nombre entier, dont la solution est la fonction de Pochgammer

$$y = C_1 F(a, b, x) + C_2 x^{1-b} F(a-b+1, 2-b, x)$$

avec
$$F(a, b, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{b(b+1)\ \ldots(b+k-1)k!} x^k,$$

b)
$$y'' + 2ay' + f(x)\,y = 0 \quad (a = const)$$

(l' équation se trouvant dans le Traité de Kamke, voir [15]),
c) L' équation de Weber (voir [15]),

$$y'' - xy' - ay = 0 \quad (a = const),$$

d) L' équation radiale ondulatoire

$$x^2 y'' + (ax^2 + bx + c)\ y = 0,$$

e) L' équation de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\ y = 0.$$

Remarquons enfin, que le cas le plus simple de la méthode de rétracte garantissant au moins une solution bornée (dans le tuyau $C_1 < y < C_2, x > x_0$, C_1, C_2 les constantes où l' on a $f(x, C_2) > 0$, $f(x, C_1) < 0$ peut être démontrée d' une façon élémentaire (voir [42]) partant de la coupure de Dedekind. Cette circonstance permet d'introduire ce procédé efficace même dans l'enseignement élémentaire des équations différentielles.

Puis, il nous semble que l'encadrement des solutions par des inégalités de Tchapliguine soit aussi très efficace dans l'étude des solutions dans l'intervalle infini. Nous avons employé ce procédé en cadre du traitement de l'équation

$$y' = \varphi(x) y^n + \psi(x, y),$$

il nous semble, pour la premiére fois dans la littérature. Les résultats sont assez généraux, surtout lorsqu'on prend en égard l'appareil élémentaire au plus possible. Dans un grand nombre de cas le premier couple de courbes encadrant les solutions suffit pour donner la conclusion que les solutions tendent vers une valeur fixe.

Dans le cas des équations dont le deuxième membre est un polynôme en y, on pourrait utiliser les divers critères concernant le nombre de racines du polynôme suivant le signe des membres particuliers, ce qui donnerait une pleine algébrisation.

Un élargissement aux cas où l'unicité n'est pas toujours remplie (l'équation $y^n + y'^m = f(x)$ par exemple) offre beaucoup de possibilités, ainsi que l'établissement plus profond de la liaison avec les problèmes aux petits paramètre.

Les sources d'inégalités fonctionnelles partant des inégalités différentielles sont nombreuses.

Les notions de stabilité non complète sont proches aux applications. Pour mieux présenter nos résultats expliqués dans le paragraphe précédent, nous citerons in extenso quelques théorèmes qui ne sont pas plus généraux que les autres, mais qui illustrent bien le genre des problémes et dont l'énoncé n'est pas beaucoup étendu.

Théorème 1.

Soit donnée l'équation

$$y' = \varphi(x) y^{2k} + \psi(x, y) \quad k = 1, 2, \ldots$$

(l'unicité remplie dans tout le plan XOY)

$$\text{avec } \psi(x, 0) > 0, \ |\varphi(x, y)| \leqslant M + P|y|^{2k-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 2k,$$

M, P-les constantes positives, $\varphi(x) \leqslant C < 0$.

Alors, toutes les solutions positives ainsi que celles-ci partant de l'axe $y = 0$ sont bornées pour $x -> +\infty$. Il existe aussi au moins une solution négative bornée pour $x -> +\infty$.

Théorème 2.

Soit donnée l'équation

$$y' = \varphi(x) y^{2k+1} + \psi(x, y) \quad k = 1, 2, \ldots$$

(l'unicité remplie dans tout le plan XOY), avec $\varphi(x) \leqslant C < 0,\ |\psi(x, y)| \leqslant A + B\,|y|^{2k+1-\varepsilon},\ A, B > 0,\ \varepsilon > 0$

alors, toutes les solutions sont bornées pour $x \to +\infty$.

Théorème 3.

Soit donnée l'équation

$$y' = \varphi(x)\, y^{2k} + \psi(x, y) \quad k = 1, 2, \ldots$$

où 1° $\varphi(x)$ est une fonction continue pour $x \geqslant x_0$,

2° $\psi(x, y)$ est dans XOY continue et satisfait à la condition de Lipszitz dans chaque partie bornée du plan XOY,

3° $C_1 \leqslant \varphi(x) \leqslant C_2\ (C_1, C_2 < 0),\ \psi(x, 0) = 0$ et
pour $y \neq 0$: $0 < N\,|y| < \psi(x, y) < M\,|y|$.

Alors, toutes les solutions positives sont bornées ne tendant pas vers zéro et il existe une classe de solutions négatives bornées tendant vers zéro.

Théorème 4.

Soit donnée l'équation

$$(y + g(x))\, y' = f_2(x)\, y^2 + f_1(x)\, y + f_0(x) \tag{1}$$

sous les hypothèses suivantes:

a) les fonctions $g(x)$, $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ sont continues pour $x \geqslant x_0$,
b) on a $g(x) > 0$, $f_0(x) < 0$, $f_1(x) - g(x)\, f_2(x) > 0$ pour $x \geqslant x_0$.
Sous ces hypothéses, pour $x > x_0$, on aura

$$e^{\int_0^x f_2(t)\, dt} \left[y_0 - \varepsilon \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} f_2(u)\, du}\, dt \right] < y(x) < y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} f_2(t)\, dt} \tag{2}$$

dans la région

$$\frac{f_0 + \varepsilon g}{g f_2 - f_1 - \varepsilon} < y < \frac{f_0}{g f_2 - f_1}, \tag{3}$$

ε étant un nombre réel positif arbitraire, et $y(x)$ la solution de l'équation (1) avec $y(x_0) = y_0$ (y_0 appartient à (3)).

Théorème 5.

Soit donnée l'équation différentielle

$$y' = [y - f(x)]\,[y + mf(x)] \prod_{i=1}^{k} [y - f_i(x)]^{\alpha_i}$$

où $f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, k)$, $f(x)$ sont des fonctions positives et continues pour $x \geqslant x_0$ et $f(x)$ *est* une fonction monotone, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +0$. Soit ensuite $m > 1$ un nombre réel et soient α_i les nombres naturels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n-2$ ($n-2$ étant pair). Alors l'équation a une solution négative tendant vers -0 *pour* $x \to +\infty$.

Théorème 6.

Soit donnée l'équation

$$y' = \frac{(y - \varphi_2(x))\,(y - \varphi_4(x)) \cdots (y - \varphi_{2n}(x))}{(y - \varphi_1(x))\,(y - \varphi_3(x)) \cdots (y - \varphi_{2n-1}(x))}$$

où les fonctions $\varphi_s(x)$ sont continues et bornées pour $x \geqslant x_0$, tellement qu'on a $\inf \varphi_k(x) > \sup \varphi_l(x)$ pour $k > l$ *et* $x \geqslant x_0$. Alors, l'équation a (dans la région $y < \varphi_1$) une classe de solutions bornées pour $x \geqslant x_0$ (mais ces solutions ne sont pas obligatoirement prolongeables pour $x \to +\infty$). Encore, il y a $n-1$ „tuyaux" encadrant les fonctions φ_{2s} et garantissant $n-1$ solutions bornées et définies pour $x \to +\infty$.

LITTÉRATURE

A

LITÉRATURE GÉNÉRALE

[1] Michel Petrovitch: „Sur l' équation différentielle de Riccati et ces applications chimiques" Sitzungsberichte Königl. böhmischen Ges. Wiss., Math-naturwiss. Classe, 1896, Prag, pp. 1—25.

[2] Michel Petrovitch: „Sur une manière d'étendre le théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre". Math. Annalen, LIV Band, 3. Heft, pp. 417—436, 1899.

[3] Michel Petrovitch: „Intégration qualitative des équations différentielles". Mémorial des Sci. math. Paris 1931.

[4] Mihailo Petrović: „Računanje sa brojnim razmacima", Beograd 1932.

[5] S. A. Čaplygin: „Novij metod približenogo integrirovanija diferencialnyh uravnenij". Klasiki jestestvoznanija, M. L. 1950.

[6]N. N. Lusin: „O metode približenogo integrirovanija akad. S. A. Čaplygina", UMN, t. VI, v. 6 (46), 1951 (3—27).

[7] T. Ważewski: „Sur un principe topologique de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires". Ann. de la Soc. pol. de Math. T XX p.p. 279—313.

[8] Tadeusz Ważewski: „Une méthode topologique de l'examen du phénomène asymptotique relativement aux équations différentielles ordinaires". Rendic. dell' Acc. Naz. dei Lincei. Classe di Sci. fis. mat. e nat. S VIII, v. III, fasc. 3—4, p.p. 210—215.

[9] Tadeusz Ważewski: „Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxième membre monotones et leurs applications". Ann. de la Soc. pol. de math. T. XXIII, 1950, pp. 112—166.

[10] Jacek Szarski: „Differential inequalities" Warszawa 1965 p. 256.

[11] Łojasiewicz S: „Sur l'allure asymptotique des intégrales du système d'équations différentielles au voisinage de point singulier". Ann. polon, math. T. I, 1955, pp. 34—72.

[12] Mikołajska Z: „Sur l'allure asymptotique des intégrales des systèmes d'équations différentielles au voisinage d'un point asymptotiquement singulier". Ann pol. math. T I, 1955, pp. 277—305.

[13] Szmydt Z: „Sur l'allure asymptotique des intégrales des certains systèmes d'équations différentielles non-linéaires", Ann. pol. math. T. I, 1955, pp. 253—276.

[14] Mikusiński J: „Sur un problème d'interpolation pour les intégrales des équations différentielles ordinaires". Ann. de la Soc. Pol. de Math., T. XIX, 1946, pp. 165—205.

[15] E. Kamke: „Spravočnik po obiknovenym dif. uravnenijam". Gosizdat Fiz. mat. lit. Moskva 1961.

[16] Wolfgang Walter: „Différential -und Integral-Ungleichungen". Springer-Verlag 1964 pp. 269.

[17] N. V. Azbelev i Z. B. Caljuk: „O zadače Čaplugina". Ukrainskij matematičeskij Žurnal, T. H, № 1, 1958, 3-12.

[18] Pejović T.: „Diferencijalne jednačine — egzistencija rešenja. Beograd 1958.

[19] Pejović T.: „Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles", Belgrade 1952.

[20] Pejović T.: „Sur quelques théorèmes élementaires des intégrales généralisées". Tokyo, 1956. T. V. Comm. math. Univ. Sancti Pauli pp. 77—80.

[21] Pejović T.: „Quelques théorèmes élémentaires des intégrales généralisées et leur applications", Bologna 1960. Bol. U. M. J. (3), Vol. 15, pp. 1—6.

[22] Tatarkiewicz K.: „Quelques exemples de l'allure asymptotique de solutions d'équations différentielles, Ann. Univ. Marie Curie Sklodowska. Vol. III, 9, 1954.

[23] A. D. Myškis, J. M. Rabinovič: Matematik Piers Bohl, Riga 1965 p. 100.

[24] „Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch (1894—1921)" Acad. roy. de Serb. Paris 1922.

[25] T. Pejović: „Novi slučajevi integrabiliteta jedne važne diferencijalne jednačine" (doktorska teza, Beograd, 1923, p. 21).

[26] D. S. Mitrinović: „Istraživanja o jednoj važnoj diferencijalnoj jednačini prvoga reda" (doktorska teza, Beograd 1935, p. 39).

[27] V. J. Zubov: „Matematičeskie metody isledovanija sistem avtomatičeskoga re ulirovanija". Lenjingrad 1959, p. 324.

[28] B. F. Bylov, P. E. Vinograd, D. M. Grobman. V. V. Nemusku. Teorija pokazatelej Ljapunova. Moskva 1966.

B

Les travaux de l'auteur dans le domaine d'analyse qualitative d'équations différentielles

[29] Milorad Bertolino: „Neke funkcionalne nejednakosti dobijene primenom Čapliginove metode i upoređivanje sa rezultatima M. Petrovića". Bull. Soc. math. et phys. de la R. P. de Serbie, IX, 1—2, Beograd 1957, pp. 87—94.

[30] Milorad Bertolino: „Procédés de l'encadrement des solutions des équations différentielles". Bull Soc. math. et phys. de la R. P. de Serbie, IX, 3—4, Belgrade 1957, pp. 261—268.

[31] M. Bertolino: „Primedba u vezi sa jednim stavom Mihaila Petrovića". Bull de la Soc. des math. et phys. de la R. P. de Serbie, X, Beograd 1958. pp. 115—118.

[32] M. Bertolino: „Théorèmes sur le comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles". Bull. de la Soc. des math. et phys. de la R. P. de Serbie, XIII, Beograd 1961, pp. 23—34.

[33] M. Bertolino: „Jedna primena diferencijalnih nejednakosti".

Matematička biblioteka 22, Beograd 1962, (pp. 37—45).

[34] Milorad Bertolino: „Egzistencija asimptotskih rešenja jedne klase diferencijalnih jednačina" (doktorska teza) Bull. de la Soc. des math. et phys. de la R. P. de Serbie, XV, Beograd 1963, pp. 79—124.

[35] Milorad Bertolino: „Asimptotska rešenja jedne diferencijalne jednačine prvog reda faktorizovane desne strane". Matematički vesnik 1 (16), Beograd 1964, pp. 23—27.

[36] Milorad Bertolino: „Tuyaux" curvilignes des solutions d'une équation différentielle". Matematički vesnik 1 (16), Beograd 1964, pp. 239—241.

[37] Milorad Bertolino: „L'intégration qualitative de l'équation d'Abel de deuxième espèce avec les généralisations". Matematički vesnik 1 (16), Beograd 1964, pp. 335—338.

[38] Milorad Bertolino: „Sur la limite (finie ou infinie) d'application des inégalités de Tchapliguine du second ordre". Ann. di Mat. pura ed appl. (IV) Vol. LXVII, pp. 113—126, Bologna 1965.

[39] Milorad Bertolino: „Uokviravanje i asimptotska rešenja jedne diferencijalne jednačine prvog reda". Matematički vesnik 2 (17), Beograd 1965, pp. 223—231.

[40] Milorad Bertolino: „O maksimalnom intervalu primene Čapliginovih nejednakosti". Matematički vesnik 3 (18), Beograd 1966, pp. 35—45.

[41] Milorad Bertolino: „Solutions asymptotiques d'une équation différentielle au deuxième membre rationnel", Matematički vesnik 3 (18), Beograd 1966, pp. 275—285.

[42] Milorad Bertolino: „Démonstration élémentaire d'un cas particulier du théorème de rétracte de Ważewski". Matematički vesnik 3 (18), Beograd 1966, pp. 302—303.

[43] Milorad Bertolino: „Solutions approximatives presque stables des équations différentielles". Matematički vesnik 4 (19), Beograd 1967, pp. 71—74.

[44] Milorad Bertolino: „Priorité de Michel Petrovitch relative au théorème de Tchapliguine sur les inégalités différentielles du premier ordre". Matematički vesnik 4 (19), Beograd 1967, pp. 165—168.

[45] Milorad Bertolino: „Zone d'influence qualitative de certaines fonctions figurant au deuxième membre des équations différentielles". Bull. sci., Conseil Acad. RSF Yougoslavie, Section A — Zagreb, Tome 12, No 9—10. 1967 p. 241.

[45]a Milorad Bertolino: „Zone d'influence qualitative de certaines fonctions". Matematički vesnik 5 (20), Beograd 1968, pp. 189—194.