О ЈЕДНОЈ BERNOULLI-ЕВОЈ ТЕОРЕМИ

ОЛГА МИТРИНОВИЋ

I. У овом чланку дајемо један нов доказ Bernoulli-еве теореме:

Ако једна аритметичка и једна геометриска прогресија имају једнака прва два члана: a_1 и a_2, где је $a_1 \neq a_2$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, тада је сваки следећи члан аритметичке прогресије мањи од одговарајућег члана геометриске прогресије.

Ову Bernoulli-еву теорему нашли смо у књизи: Г. Л. Невяжский, Неравенства, Учпедгиз, Москва 1947, стр. 124—126.

Доказ ове теореме који вероватно потиче од Bernoulli-а знатно је дужи од овог који ћемо ми изнети и заснива се на Еуклидовој теореми:

Збир највећег и најмањег члана пропорције $a : b = c : d$, где су a, b, c, d позитивни бројеви, већи је од збира два остала члана те пропорције.

II. Наш доказ изведен је методом потпуне индукције.

Посматрајмо прогресије:

$$a_1,\ a_2,\ a_1 + 2\,(a_2 - a_1), \cdots,\ a_1 + n\,(a_2 - a_1);$$

$$a_1,\ a_2,\ a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2, \ \cdots,\ a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n.$$

Разлика трећих чланова износи

$$a_1 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - a_1 - 2\,(a_2 - a_1),$$

тј. после сређивања

$$\frac{(a_2 - a_1)^2}{a_1},$$

одакле се закључује да је теорема у важности за $n = 2$.

Претпоставимо сада да је ова теорема тачна за $n = k$, $(k \geqslant 3)$, тј.

$$a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^k > a_1 + k\,(a_2 - a_1). \tag{1}$$

Уз учињене претпоставке у важности је релација

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^k (a_2 - a_1) > a_2 - a_1. \tag{2}$$

Заиста, ако је $a_2 > a_1$, тада је

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^k > 1 \text{ и } a_2 - a_1 > 0,$$

па је горња релација тачна.

Ако је $a_2 < a_1$, тада је

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^k < 1 \text{ и } a_2 - a_1 < 0,$$

на основу чега се закључује да је релација (2) опет у важности.

Релација (2) је битна за наш доказ.

Из релација (1) и (2), после сабирања, добија се:

$$a_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^k > a_1 + (k+1)\,(a_2 - a_1),$$

тј.

$$a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^k > a_1 + (k+1)\,(a_2 - a_1)$$

и најзад

$$a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{k+1} > a_1 + (k+1)\,(a_2 - a_1).$$

Ова релација показује да је теорема тачна за $n = k+1$, ако је тачна за $n = k$.

Дакле, закључком од k на $k+1$ доказали смо Bernoulli-еву теорему.

III. Можемо доказати и следећу теорему, на коју нисмо наишли у литератури:

Ако једна аритметичка и једна геометриска прогресија имају једнака прва два члана a_1 и a_2, где је $a_1 \neq a_2$, $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, тада је сваки следећи члан аритметичке прогресије већи од одговарајућег члана геометриске прогресије.

И ова се теорема може доказати закључком од k на $k+1$.

У овом случају место релација (1) и (2) имаћемо релације:

$$(1') \qquad a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^k < a_1 + k(a_2 - a_1), \quad (k \geqslant 3)$$

$$(2') \qquad \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^k (a_2 - a_1) < a_2 - a_1.$$

Показаћемо да је релација (2′) тачна уз наше претпоставке о a_1, a_2 и k, док доказ саме теореме нећемо износити.

Ако је $a_1 > a_2$ тада је

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^k > 1 \text{ и } a_2 - a_1 < 0,$$

на основу чега се закључује да је релација (2′) тачна.

Ако је $a_1 < a_2$, тада је

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^k < 1, \; a_2 - a_1 > 0,$$

чиме је опет потврђена тачност релације (2′).

Olga Mitrinović

SUR UN THÉORÈME DE BERNOULLI

(Résumé)

1. Dans cette Note on donne une nouvelle démonstration du théorème suivant de B e r n o u l l i:

I. Si une progression arithmétique

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

et une progression géométrique

$$b_1, b_2, b_3, \cdots$$

satisfont aux conditions

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2,\ a_1 \neq a_2,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,$$

alors

$$a_k < b_k, \text{ pour } k = 3, 4, \cdots$$

La démonstration en question est simple et fondée sur la relation (2), (voir le texte en serbe), en utilisant l'induction complète.

2. On énonce aussi le théorème suivant, non rencontré en littérature mathématique:

II. Si une progression arithmétique

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots$$

et une progression géométrique

$$b_1,\ b_2,\ b_3, \cdots$$

remplissent les conditions

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2,\ a_1 \neq a_2,\ a_1 < 0,\ a_2 < 0,$$

alors

$$a_k > b_k, \text{ pour } k = 3, 4, \cdots$$

3. On trouve le théorème I. par exemple dans les livres:

1° Г. Л. Невяжский, Неравенства, Учпедгиз, 1947, Москва, p. 124—126;[4]

2° A. Ostrowski, Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung, Bd. I, 1952, Basel, S. 35, Aufgabe 19.