Математички Билтен
Книга 5—6 (XXXI—XXXII), 1981—1982, (5—15)
Скопје — Југославија

НЕЛАГРАНЖЕВСКА ВАРИЈАЦИЈА НА КОНСТАНТИТЕ ВО ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД II РЕД

Драган Димитровски, Елена Атанасова

Целта на овој труд е да се воведат нови варијации на константите, со намера да се решат квадратурно нови класи диференцијални равенки, врз познати општи решенија на дадените равенки. При тоа традиционалната Лагранжева варијација на константите се јавува како специјален симетричен случај.

ДЕФИНИЦИИ:

Нека е дадена диференцијалната равенка од n-ти ред

(1) $L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

каде $a_i = a_i(x)$ се непрекинати коефициенти и десната страна F задоволува услов за егзистенција и единственост на решението, т.е. $F \in (C, Lip)$. Нека соодветната хомогена равенка

(2) $L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0$

е решена со

(3) $$y = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i$$

каде $\{y_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ е еден фундаментален систем интеграли, со особина вронскијанот $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$.

Дефиниција 1. Варијација на константите

$$C_i = C_i(x); \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

се вика *лагранжевска* при изборот на условите

$$\sum_{i=1}^{n} C_i' \, y_i^{(k)} = 0, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$$

(4) $$\sum_{i=1}^{n} C_i' \, y_i^{(n-1)} = F\left(x, \sum_{i=1}^{n} C_i \, y_i, \sum_{i=1}^{n} C_i \, y_i', \ldots, \sum_{i=1}^{n} C_i' \, y_i^{(n-2)}\right)$$

Дефиниција 2. Специјално, варијација на константите, традиционално се вика *Лаїранева*, ако е

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = \varphi(x)$$

т.е. ако условите на Лагранж гласат ([2], [3]):

(5) $$\sum_{i=1}^{n} C_i' \, y_i^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i' \, y_i^{(n-1)} = \varphi(x).$$

Познато е дека (5) секогаш има еднозначно решение по $C_i'(x)$ за секој избор на $\varphi(x)$. Меѓутоа, во трудот [1] е покажано дека постојат широки класи равенки (1) за кои и (4) има решение.

Дефиниција 3. Варијација на константите која се состои во симултан друг избор на условите за C_i во изводните равенки, различен од тој во (4) и (5) ќе ја наречеме *нелаїранжева.*

Дефиниција 4. Уште поопшто, варијација на константите која се состои во произволен избор на константите C_i, несимултан и кој позволува и нови параметри, ќе ја наречеме *нелаїранжевска.*

ЕГЗИСТЕНЦИЈА НА НЕЛАГРАНЖЕВСКИ ВАРИЈАЦИИ НА КОНСТАНТИТЕ

Дека вакви варијации постојат, ќе покажеме на случајот на позната нехомогена равенка од II ред.

Нека равенката

(6) $$L(y) \equiv y'' + a(x) \, y' + b(x) \, y = 0$$

е решена со

(7) $$y = C_1 \, y_1 + C_2 \, y_2; \quad w(y_1, y_2) \neq 0$$

Познато е тогаш дека ставајќи $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, со $y = C_1(x) \, y_1 + C_2(x) \, y_2$ може да се реши и нехомогената равенка

(8) $$y'' + ay' + by = \varphi(x)$$

со Лагранжевата варијација на константите, која за втор ред гласи

(9) $$\begin{aligned} C_1' y_1 + C_2' y_2 &= 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' &= \varphi(x) \end{aligned}$$

Функциите $C_1(x), C_2(x)$ изнесуваат

(10) $$C_1(x) = -\int \frac{y_2 \varphi(x)}{w} dx + \alpha; \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 \varphi(x)}{w} dx + \beta;$$

и општото решение на (8) гласи

(11) $$y = \alpha y_1 + \beta y_2 + Y,$$

каде

(12) $$Y = -y_1 \int \frac{y_2 \varphi(x)}{w} dx + y_2 \int \frac{y_1 \varphi(x)}{w} dx,$$

претставува еден партикуларен интеграл на нехомогената равенка (8).

Сега ќе ја докажеме следната:

Теорема. *Симетрична нелагранжева варијација на константите определена со* (13) *еквивалентно ја решава нехомогената равенка* (8), *исто како и Лагранжевата варијација* (9), *ако соодветната хомогена равенка* (6) *е решена со* (7).

Доказ. Во изводните равенки на (7) не одбираме никакви дополнителни услови, како што тоа го направил Лагранж:

$$y' = C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

$$y'' = C_1'' y_1 + C_2'' y_2 + 2 C_1' y_1' + 2 C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2''.$$

Тогаш замената во (8), со оглед на тоа да се y_1, y_2 решенија на (6) ,т.е. $L(y_1) \equiv 0$ и $L(y_2) \equiv 0$, не доведува до

$$C_1'' y_1 + 2 C_1' y_1' + aC_1' y_1 + C_2'' y_2 + 2 C_2' y_2' + a C_2' y_2 = \varphi(x)$$

Ако избереме нелагранжев услов

(13) $$\begin{aligned} c_1'' y_1 + 2 c_1' y_1' + a c_1' y_1 &= \frac{\varphi(x)}{2} \\ c_1'' y_2 + 2 c_2' y_2' + a c_2' y_2 &= \frac{\varphi(x)}{2} \end{aligned}$$

Системот (13) претставува една симетрична (по C_1, C_2 и y_1, y_2) нелагранжева варијација на константите, составен од две одделни квадратурно решливи равенки по C_1 и C_2. Добиваме

$$(14)\quad C_1 = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a(x)\,dx} \left[\alpha_1 + \frac{1}{2} \int y_1\, \varphi(x)\, e^{\int a(x)\,dx}\, dx \right] dx + \beta_1,$$

$$C_2 = \int \frac{1}{y_2^2} e^{-\int a(x)\,dx} \left[\alpha_2 + \frac{1}{2} \int y_2 \varphi(x) e^{\int a(x)\,dx}\, dx \right] dx + \beta_2.$$

Со оглед на познатите Лиувилови формули за партикуларни интеграли на (6):

$$(15)\quad y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a(x)\,dx} dx;\ w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{-\int a(x)\,dx} \neq 0$$

Заменувајќи (14) во (7) добиваме облик на општото решение на (8), во кој константите α_1, β_1, α_2, β_2 се редуцираат само на две (другите две се линеарно зависни од нив):

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2 + Y^*$$

каде

$$(16)\quad Y^* = \frac{y_1}{2} \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a(x)\,dx} \left(\int y_1 \varphi(x) e^{\int a(x)\,dx} dx \right) dx +$$

$$+ \frac{y_2}{2} \int \frac{1}{y_2^2} e^{-\int a(x)\,dx} \left(\int y_2 \varphi(x) e^{\int a(x)\,dx} dx \right) dx$$

Теоремата е докажана. Последица е еден нов облик (16) за партикуларниот интеграл на нехомогената равенка (8):

Последица. Еден партикуларен интеграл Y^* на нехомогената равенка (8) може да се добие низ две квадратури со помош на системот решенија y_1, y_2 на хомогената равенка (6), по формулата (16), и тој е еквивалентен со (12) во смисла да комплетира општото решение на (8); но важи $Y^* \neq Y$.

Следователно, традиционалната Лагражнева варијација на константите не е и единствена, за иста нехомогена равенка (8).

НЕЛАГРАНЖЕВА ВАРИЈАЦИЈА НА КОНСТАНТИТЕ. ХОМОГЕН СЛУЧАЈ

·Го посматраме сега следниот проблем:

Ако равенката (6) е решена со (7), ставајќи во (7) : $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$; дали со варијација на константите $y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2$ не е решена една линеарна хомогена равенка од вид

$$y'' + ay' + by = Ay' + By \tag{17}$$

т.е. равенката

$$y'' + (a - A)\,y' + (b - B)\,y = 0,$$

каде функциите A и B ткеба да се изберат со што поголема општост за равенката (17) да може да се реши квадратурно со некоја нелагранжевска варијација на константите.

Наоѓајќи извод од (7), со оглед да е (6) задоволено со y_1, y_2: $L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = 0$, од (17) се добива равенството

$$(*)\quad C_1''\,y_1 + C_1'\,(2\,y_1' + ay_1) + C_2''\,y_2 + C_2'\,(2\,y_2' + ay_2) =$$

$$= A(x)\,[C_1'\,y_1 + C_2'\,y_2 + C_1\,y_1' + C_2\,y_2'] + B(x)\,[C_1\,y_1 + C_2\,y_2].$$

Овде ќе формираме една нелагранжевска варијација на константите таква да бидат исполнети следните услови: симетричност по C_1, C_2 и по коефициентите во Лагранжевските равенки, и квадратурна решливост на равенките по константите. Тоа ќе го постигнеме ако избереме еден доволен услов:

$$C_1\,[Ay_1' + By_1] + C_2\,[Ay_2' + By_2] = 0 \tag{18}$$

кој ограничува избор на A и B со тоа што е само A произволна функција, а B сега зависи од A и од C_1, C_2. Како C_i ќе зависат од $A(x)$, y_1, y_2; тоа B ќе зависи од тројката A, y_1, y_2. Со условот (18) од (*) добиваме

$$C_1''\,y_1 + C_1'\,(2\,y_1' + ay_1) + C_2''\,y_2 + C_2'\,(2\,y_2' + ay_2) = A\,y_1\,C_1' + A\,y_2\,C_2'$$

од каде природно следува следната нелагранжевска варијација на константите:

$$\begin{aligned} &C_1''\,y_1 + C_1'(2\,y_1' + (a - A)y_1) = 0 \\ (19)\qquad &C_2''\,y_2 + C_2'\,(2\,y_2' + (a - A)\,y_2) = 0 \end{aligned}$$

која е лесно квадратурно решлива низ интегралите

$$(20)\qquad C_1(x) = \alpha_1 \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int (a-A)\,dx}\, dx + \beta_1$$

$$C_2(x) = \alpha_2 \int \frac{1}{y_2^2}\, e^{-\int (a-A)\,dx}\, dx + \beta_2$$

каде α_1, α_2, β_1, β_2 се произволни константи. Ако условот (18) го решиме по $B(x)$:

$$(18)\qquad B = -A\,\frac{C_1 y_1' + C_2 y_2'}{C_1 y_1 + C_2 y_2}$$

и замениме така определени C_1, C_2 со (20) добиваме дека B зависи од A, од y_1, y_2 и од четирите константи α_1, β_1, α_2, β_2:

$$(21)\qquad B = -A\,F\,(x,\ A\ (x),\ y_1,\ y_2,\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2) = -$$

$$-A(x)\,\frac{y_1'\left[\alpha_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int (a-A)\,dx} dx + \beta_1\right] + y_2'\left[\alpha_2 \int \frac{1}{y_2^2} e^{-\int (a-A)\,dx} dx + \beta_2\right]}{y_1\left[\alpha_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int (a-A)\,dx} dx + \beta_1\right] + y_2\left[\alpha_2 \int \frac{1}{y_2^2} e^{-\int (a-A)\,dx} dx + \beta_2\right]}$$

Тоа значи дека хомогената равенка (17), со услов (17а)

$$(17а)\qquad y'' + (a - A)\,y' + (b + AF(A, y_1, y_2))\,y = 0$$

е решена со

$$y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2$$

т.е. со

$$(22)\qquad Y_1 = \alpha_1 y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int (a-A)\,dx}\, dx + \beta_1 y_1 +$$

$$+\alpha_2 y_2 \int \frac{1}{y_2^2}\, e^{-\int (a-A)\,dx} dx + \beta_2 y_2.$$

Т.е. равенката (17а) која содржи една произволна функција $A(x)$, две познати решенија y_1, y_2 на равенката (6) и четири произволни константи α_1, β_1, α_2, β_2, има партикуларен интеграл даден со (22) кој зависи од y_1, y_2, A, α_1, β_1, α_2, β_2. Вториот партикуларен интеграл Y_2 ќе го определиме на вообичаен начин, со замена $y = Y_1 . z$, каде z е нова непозната функција. Диференцијарќи ја смената два пати и заменувајќи во (17) добиваме равенка

$$Y_1 z'' + [2\,Y_1' + (a - A)\,Y_1]\,z' = 0$$

односно по замена $z' = W$, равенка

$$\frac{dW}{W} + \left[\frac{2\,Y_1'}{Y_1} + (a - A)\right] dx = 0$$

од каде

$$W = \frac{\alpha}{Y_1^2}\, e^{-\int (a-A)\, dx}.$$

и

$$z = \alpha \int \frac{1}{Y_1^2}\, e^{-\int (a-A)\, dx}\, dx + \beta$$

Одовде го наоѓаме и вториот партикуларен интеграл

(23) $Y_2 = Y_1 \left[\alpha \displaystyle\int \frac{1}{Y_1^2}\, e^{-\int (a-A)\, dx}\, dx + \beta \right]$, α, β — интеграциони константи.

Општото решение на (17) тогаш ќе биде

$$y = \mathrm{Const}^1 . Y_1 + \mathrm{Const}^2 . Y_2$$

и по групирање на константите, имаме

$$y = \lambda\, Y_1 + \mu\, Y_1 \int \frac{1}{Y_1^2}\, e^{-\int (a-A)\, dx}\, dx \tag{24}$$

Така ја докажавме следната

Теорема. *Хомогената равенка од втор ред* (17*а*), *ако е решена равенката* (6) *со* (7); *во која* F *е определена со* (21), *која зависи од* 4 *произволни константи, една произволна функција* $A(x)$, *и решенијата* y_1, y_2 *на* (6), *е решена со една пелаіранжева варијација на константите* (19), *и нејзиното решение е дадено со* (24), *каде* Y_1 *е дадено со* (22).

НЕЛАГРАЖНЕВА ВАРИЈАЦИЈА НА КОНСТАНТИТЕ КОЈА ЈА СОДРЖИ ЛАГРАНЖЕВАТА ВО СЕБЕ. НЕХОМОГЕН СЛУЧАЈ

Во трудот [1] ние решивме некои равенки од II ред од вид

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = F(x; y, y')$$

со лагранжевска варијација на константите од вид (4). Сега ќе посматраме, специјално, линеарна функција F:

$$F(x, y, y') = \varphi(x) + A(x)y' + B(x)y$$

и со помош на нелагранжева симетрична варијација на константите ќе се опитаме да решиме нова линеарна равенка

$$y'' + ay' + by = \varphi(x) + Ay' + By \tag{25}$$

т.е.

$$y'' + (a - A)y' - (b - B)y = \varphi(x)$$

ако позната равенка (6): $L(y) = y'' + ay' + by = 0$ е решена со (7). Се прашуваме за какви A, B, и φ овој проблем може квадратурно да се реши. Диференцирајќи го решението $y = C_1(x)y_2 + C_2(x)y_2$, со оглед да е $L(C_1y_1 + C_2y_2) \equiv 0$, добиваме од (25) равенство

$$C_1''y_1 + C_1'(2y_1' + ay_1) + C_2''y_2 + C_2'(2y_2' + ay_2) =$$

$$= \varphi(x) + A(x)[C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2'] + \beta(x)[C_1y_1 + C_2y_2].$$

Со оглед да е соодветната хомогена равенка за (25) дадена со (17) и веќе е решена, сега ќе се опитаме да формулираме една слична нелагранжевска варијација на константите така што сега да бидат исполнети следните три услови:

1°. Симетричност на условите по C_1, C_2 и по коефициентите;

2°. Квадратурна решливост на лагранжевските равенки;

3°. Класичната Лагранжева варијација на константите да е содржана во последнава.

Пред се ќе го задржиме истиот услов (18) кој ограничува избор на A и B, и B поврзува со A и со y_1, y_2, α_1, β_1, α_2, β_2. Така равенката (25) станува

$$C_1''y_1 + C_1'(2y_1' + ay_1) + C_2''y_2 + C_2'(2y_2' + ay_2) = \varphi(x) +$$

$$+ Ay_1C_1' + Ay_2C_2',$$

од каде природно следува нелагранжевата варијација на константите:

$$
(26)\quad
\begin{aligned}
C_1'' y_1 + C_1' (2 y_1' + C y_1) &= \frac{\varphi(x)}{2} + A(x)\, y_1 C_1',\\
C_2'' y_2 + C_2' (2 y_2' + a y_2) &= \frac{\varphi(x)}{2} + A(x)\, y_2 C_2',
\end{aligned}
$$

лесно квадратурно решлива

$$
(27)\quad C_i(x) = \alpha_i \int \frac{1}{y_i^2} e^{-\int (a-A)\,dx} dx + \beta_i +
$$

$$
+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{y_i^2} e^{-\int (a-A)\,dx} \left(\int y_i e^{\int (a-A)\,dx} \varphi(x)\, dx \right) dx, \quad i = 1,\ 2
$$

Овде $C_1(x)$, $C_2(x)$ зависат од A, y_1, y_2 и од 4 произволни константи. Тоа значи дека со овие $C_i(x)$ дадени со (27) функцијата

$$
y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2
$$

е еден партикуларен интеграл на нехомогената равенка

$$
y'' + (a - A)\, y' + (b + A \,.\, F(y_1, y_2, A))\, y = \varphi(x)
$$

и тој гласи:

$$
Y_{\substack{\text{не исм.}\\ \text{нехом.}}} = \alpha_1 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int (a-A)\,dx} dx + \beta_1 y_1 +
$$

$$
+ \frac{y_1}{2} \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int (a-A)\,dx} \left(\int y_1 e^{\int (a-A)\,dx} \varphi(x)\, dx \right) dx +
$$

$$
+ \alpha_2 y_2 \int \frac{1}{y_2^2} e^{-\int (a-A)\,dx} dx + \beta_2 y_2 +
$$

$$
+ \frac{y_2}{2} \int \frac{1}{y_2^2} e^{-\int (a-A)\,dx} \left(\int y_2 e^{\int (a-A)\,dx} \varphi(x)\, dx \right) dx.
$$

Како општото решение на хомогената равенка е дадено со (24), а со (28) е даден еден партикуларен интеграл на нехомогената, ја имаме следната:

Теорема. *Нехомоіенаша линеарна равенка* (25), *во која* $A(x)$, $\varphi(x)$ *се йош йолно йроизволни инаеірабилни функции, ако соодвеШнаШа хомоіена и йомошна равенка* $L(y) \equiv y'' + ay' + by = 0$ *е решена со* $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ *е решлива со нелаіранжеваШа варијација на консШанШиШе дадена со* (26), *при што коефициентот* $B(x)$ *зависи од* $A(x), \varphi(x), y_1, y_2$, *и од 4 произволни константи* $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ *и даден е со* (18), *каде за* $C_1(x), C_2(x)$ *треба да се земат вредностите* (27), *и општо решение на* (25) *гласи*

$$(28) \qquad y_{\substack{\text{општо}\\ \text{нехом}}} = \lambda_1 Y_1 + \mu\, Y_1 \int \frac{1}{Y_1^2} e^{-\int (a-A)\,dx}\, dx + Y_{\substack{\text{партик.}\\ \text{нехомог.}}}$$

каде λ, μ *се произволни интеграциони константи,* Y_1 *е заедно со* (22), *а* $Y_{\text{нехомог}}$ *е дадено со* (28).

Со помош на оваа теорема низ една нелагранжевска варијација на константите успеваме да решиме равенки со поголем број параметри, за сметка на извесна специјализација на обликот и зависните коефициенти.

Специјални случаи

I. Ако $A(x) \equiv 0$, тогаш и $B(x) \equiv 0$, и за равенката

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = \varphi(x)$$

добиваме нелагранжева варијација на константите определена со (13), (14) и партикуларен интеграл на нехомогената равенка даден со (16), за која докажавме дека е еквивалентна со Лагранжевата. Така класичната варијација на константите се содржи во нашата.

II. Ако е $a = A$, добиваме решение за некои класни равенки

$$y'' + (b - B)\,y = \varphi(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Димитровски, Б. Илиевски: За можностите за обопштување на методата на Лагранж на варијација на константите, Математички Билтен, книга I (XXVII) Скопје, 1978, стр. 37—49.
2. Степанов, Курс, дифференциалных уравнений, III издание, Москва 1965.
3. Камке, Справочник по обикновенным дифференциальным уравнениям, (1961, Москва.

UNE VARIATION DES CONSTANTES NON-LAGRANGIENNE RELATIVE A L'EQUATION DIFFERENTIELLE ORDINAIRE DU SECOND ORDRE

Dragan Dimitrovski, Elena Atanasova

Résumé

L'équation différentielle ordinaire du n-ième ordre étant donnée par (1), et la solution de l'équation corresopondante homogène (2) étant donnée par (3) ,on définit: **Définition 1,** La variation des constantes $C_i = C_i(x)$ est dite *lagrangienne* au cas de la choi des conditiones (4).

Plus particulièrement si $F \equiv \varphi(x)$, on a la variation traditionelle des constantes de Lagrange, donné par (5)

Definition 2. Toute autre variation des constantes qui se constitue daus e une élection différente des „constantes" $C_t(x)$ est dite non-lagrangienne.

Dans cet article nous avons montré d'abord l'existence des variations des constantes non-lagrangiennes. C'est (13) dans (6) et (7).

Ensuite, on démontre qu'il est possible à resoudre les nouvelles équations linéares et homogènes (17) au moyen de (6) + (7) avec une variation (19), qui donne la solution (24), avec (22).

A la fin, une généralisation immédiate de la variation classique, qui la contient est donnée par (24) et (28).

Une généralisation utile du mèthdoe classique de Lagrange st évidament possible dans la théorie des équations différentielles ordinaires.