JEDAN NAČIN ODREĐIVANJA MOMENTA IMPULSA U VALNOJ MEHANICI

JOSIP MOSER

Kod određivanja apsolutne vrijednosti momenta impulsa elektrona u centralno simetričnom polju, udžbenici valne mehanike[1] izvode formulu za kvadrat momenta impulsa pomoću komponenatu. To vodi do opsežnijih elementarnih izračunavanja i zato neki udžbenici[2] donose samo rezultat, a Weizel[3] čak navodi samo vlastite vrijednosti i kaže, da se kvadrat momenta impulsa dobiva „nach umständlicher Rechnung, die wir hier nicht ausführen". Pokazat ću, da je račun razmjerno kratak, ako se, mjesto s komponentama, računa vektorski.

U klasičnoj mehanici je momenat impulsa definiran ovako:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\,\mathbf{p}]\,.$$

U valnoj mehanici treba mjesto klasičnog impulsa **p** uzeti operator $\frac{h}{2\pi i}\nabla$. Zato je u valnoj mehanici

$$\mathbf{M} = \frac{h}{2\pi i}[\mathbf{r}\,\nabla],$$

a

$$M^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2}[\mathbf{r}\,\nabla]\,[\mathbf{r}\,\nabla].$$

Po pravilu za skalarno množenje dvaju vektorskih produkata, koje glasi $[\mathbf{A}\,\mathbf{B}]\cdot[\mathbf{C}\,\mathbf{D}] = \mathbf{AC}\cdot\mathbf{BD} - \mathbf{BC}\cdot\mathbf{AD}$, dobijemo

$$M^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2}(\mathbf{r}^2\nabla^2 - \nabla\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}\,\nabla).$$

U polarnim koordinatama **r** i ∇ imaju komponente

$$\mathbf{r} = \begin{cases} r \\ 0 \\ 0 \end{cases} \qquad \nabla = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta} \\ \dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \end{cases}$$

pa su skalarni produkti $\nabla \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot r$ i $\mathbf{r} \nabla = r \frac{\partial}{\partial r}$, a jer je $\nabla^2 = \Delta$, dobijemo

$$M^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2}\left\{r^2 \Delta - \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)\right\}.$$

Budući da za Laplaceov operator Δ u polarnim koordinatama vrijedi izraz

$$r^2 \Delta = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \Lambda$$

gdje je

$$\Lambda = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

slijedi, da je

$$M^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2} \Lambda.$$

To je traženi izraz za M^2.

Poznato je, da operator Λ ima vlastite vrijednosti $-l(l+1)$ gdje je l cio broj. Stoga M može imati samo vrijednosti

$$M = \frac{h}{2\pi} \sqrt{l(l+1)}.$$

LITERATURA

1. M. Born, Atomic Physics, London and Glasgow 1946, str. 317.
   C. Schaefer, Einführung in die theor. Physik, Bd. III/2, Berlin und Leipzig 1937, str. 391 i 392.
   A. March, Grundlagen der Quantenmechanik, Leipzig 1931, str. 106.
   F. Hund, Einführung in die teor. Physik, Bd. 5, Leipzig 1950, str. 281.
2. K. Bechert und C. Gerthsen, Atomphysik Bd. II. Berlin 1944, str. 130.
   L. de Broglie, Éléments de théorie des Quanta et de mécanique ondulatoire, Paris 1953, str. 233.
   L. Schiff, Quantum Mechanics, New-York Toronto London 1949, str. 75
   I. Supek, Teorijska fizika i struktura materije II dio, Zagreb 1952, str. 248.
3. W. Weizel, Lehrbuch der theor. Physik, Berlin Göttingen Heidelberg 1950, str. 850.