O CENTRIFUGALNOJ SILI U NAŠIM ŠKOLSKIM KNJIGAMA

MARIN KATALINIĆ

I.

Osnovni zahtjev, koji stavljamo na svaki školski udžbenik, jest taj, da naučne istine pruži đaku u dostupnom obliku, ali s dovoljnom naučnom strogošću. Naročito tražimo, da knjiga dade đaku čiste osnovne pojmove; gradeći na njima i zaključujući ispravno pomoću njih đak će samostalnije napredovati u poznavanju prirode i izgrađivati u sebi ispravan naučni krug spoznaja.

Zapazio sam, da je u našim srednjoškolskim fizičkim udžbenicima pojam centrifugalne sile dat vrlo različito, manjkavo, katkada i nezdravo. Neznam drugog pitanja, u kojem bi se naši udžbenici toliko razilazili. Međutim, radi se o sili, s kojom se vrlo često susrećemo u dnevnom iskustvu; a o njoj će vrlo različite i čudnovate slike ponijeti iz škole đaci iz različitih krajeva, koji su se služili različitim udžbenicima. A tako isto različite slike mogle su ponijeti o njoj i različite generacije đaka, prema udžbenicima kojima su se služili.

Pisati o jednoj tako staroj stvari, o kojoj je već toliko pisano, i koja je u nauci već davno skinuta s dnevnog reda, može biti vrlo dosadno. Ipak držim, da će biti korisno. U ovom pregledu obuhvaćam i naše starije i sadašnje udžbenike, u koliko su mi dostupni. Nažalost nijesam imao pri ruci slovenačkih udžbenika, pa će u tom pogledu ovaj pregled biti nepotpun. Među naše udžbenike ubrajam i one, koji su prevedeni s drugih jezika. U vezi s tim bit će dodirnuti i neki univerzitetski udžbenici. — Napominjem, da sam sličnih nedostataka i netačnosti u pogledu centrifugalne sile našao i u inostranim srednjoškolskim udžbenicima, koji su mi došli do ruku. Može se čak nadodati, da su ti naši nedostaci dobrim dijelom odraz inostranih nedostataka.

Svi se udžbenici slažu u tome, da je centrifugalna sila posljedica inercije (ustrajnosti), jer materijalna tačka u kružnom gibanju nastoji po inerciji da se giba pravcem tangente. Glavne razlike dolaze u pitanju hvatišta. U diskusiji poslije jednog predavanja u Zagrebu pred nekoliko godina postavljeno je predavaču ovo pitanje*): „Centrifugalna sila i centripetalna sila u

*) Nijesam bio ni predavač ni diskutant.

svakoj su tačci kružne staze jednake i suprotne; dakle se poništavaju. Kako onda dolazi do gibanja u krugu?" Pitanje je vrlo dobro i dosljedno postavljeno, a k o se ima na umu samo II. Newtonov zakon, i a k o se polazi s ovakvog nepotpunog pojma o centrifugalnoj sili. Da bi se toj dilemi izbjeglo, centrifugalnu silu označuju fiktivnom silom ili računskom veličinom[1]), ili joj dogmatičkim načinom — bez obrazloženja — propisuju nova svojstva: „centripetalna i centrifugalna sila . . . ne mogu biti zamenjene jednom rezultantom"[2]). Kako je centripetalna bez svake sumnje obična, legitimna sila, ovo iznimno svojstvo svakako treba pripisati samo centrifugalnoj sili. Međutim, kod drugih dvaju pisaca, samo par stranica dalje, centrifugalna sila i sila teža davaju rezultantu[3]).

Od naših pisaca samo D u k i ć izričito ističe fiktivnost centrifugalne sile („Tako zvana centrifugalna sila nije dakle nikakva mekanička sila")[4]). Međutim, čini se, da je takav pravac češće implicitno zastupan, a očituje se tamo, gdje se u zadacima kanda izbjegava izračunavanje centrifugalne sile — koja se neposrednije i psihološki nameće — a mjesto nje se traži izračunavanje centripetalne sile[5]). Držim, da đak neće osjetiti

---

[1]) N. pr.: A. F ö p p l, Techn. Mechanik, I, Leipzig—Berlin 1925, str. 67—68.

[2]) I. I. S o k o l o v, Tečaj fizike, udžbenik za srednje škole, I. deo, srpski prevod, Beograd 1946, str. 185—186; 2. izd., Beograd 1947, ibid.; makedonski prevod, Skopje 1946, str. 226. U prostoru označenom točkicama nastavlja se u srpskom prevodu osakaćeni dio prve rečenice. U makedonskom prevodu stoji ovako: „Centrostremitelnata i centrobežnata sila napag'aat na dve različni tela i ne možat da bidat zamesteni so edna rezultanta". Odavle se vidi, da između obiju rečenica nema kauzalne veze. Ako je u misli autora (originala nemam) prva rečenica zamišljena kao obrazloženje drugoj, to bi opet bilo promašeno. Jer u svim primjerima, koje on donosi, centralno tijelo, veza i tijelo koje se okreće, čine u vrtnji čvrsto tijelo. Centrifugalna i centripetalna su ne samo komplanarne sile nego čak djeluju u istom pravcu; dakle bi se po zakonima čvrstog tijela morale moći sastavljati. — S druge strane, prema osnovnom zakonu o hvatištu sile na čvrstom tijelu, nema ovdje uopće smisla isticati različita hvatišta dviju takvih sila.

J. L u k a t e l a i B. O g r i z o v i ć, Fizika za više razrede, mehanika I, Zagreb 1947, str. 85. — Uopće kod svih pisaca citiram ona izdanja, koja imam pri ruci. Kurzivi i spacionirana mjesta u citatima nalaze se i u originalu; gdje sam ja istaknuo kurzivom ili razmaknutim slovima pojedina mjesta, to napose napominjem.

[3]) L u k a t e l a - O g r i z o v i ć, l. c., str. 86—87.

[4]) M. D. D u k i ć, Fizika za više razrede, Beograd 1914, str. 32. „Kad telo, koje se kreće po krivolinijskoj putanji inercijom teži da ode pravcem dirke, onda tu ne može biti ni govora o sili, kad samo kretanje tela isključuje svaki pojam o takvoj nekoj sili". — Ovo obrazloženje pri kraju odnosit će se na isto ono pitanje, koje je postavljeno u Zagrebu.

[5]) S. H o n d l, Fizika za više razrede srednjih škola, 2. izd., Zagreb 1927, str. 60; 3. izd., Zagreb 1940, str. 32, zad. 29. 30.

L u k a t e l a - O g r i z o v i ć, l. c., str. 87, zad. 3; str. 85—86, vagon na krivini.

S o k o l o v, l. c., srp. izd., str. 188—189, zad. 3—7, str. 197—198, zad. 7.

velike potrebe da izračunava centripetalnu silu na 1 gram mase na periferiji kotača zamašnjaka nekog stroja u vrtnji[6]), kada zna, da je ta centripetalna sila mnogo manja od čvrstoće materijala, koja sprječava da se zamašnjak ne bi razletio. A izračunavanje napetosti u zamašnjaku od vrtnje nije đaku dostupno. Sokolov i u djelovanju zemljine vrtnje na akceleraciju teže uvlači centripetalnu silu, ne spominjući uopće centrifugalnu[7]).

Dukić (l. c.), Mihailović[8]), Hondl (l. c.), Popović[9]), Šplait[10]), Lukatela i Ogrizović (l. c.), Sokolov (l. c.), a donekle i Kučera[11]) objašnjavaju centrifugalnu silu kao posljedicu inercije, uslijed koje tijelo ili materijalna tačka u kružnom kretanju nastoje da se udalje od središta gibajući se pravcem tangente. Ima većih ili manjih niansa u načinu izražavanja; ali sve se svodi na to. Mihailović u svojoj knjizi za više razrede inerciji [„centrifugalna je sila upravo posljedica istrajnosti (inercije) . . .“] pridodaje i energiju kao silu[12]).

Kod Mihailovića, u obje knjige (l. c. i [12]) [„ . . . te zbog toga ono“ (telo) „vuče pravcem od centra ka periferiji“], i kod Šplaita hvatište centrifugalne sile je u tijelu, koje se okreće.

Kod Popovića hvatište centrifugalne sile jedan put je u tijelu, koje se okreće, drugi put je u njegovoj spojnoj vezi sa središtem. „Osem toga na ruci se tada oseća, da je telo, preko konca, uvek vuče u pravcu, u kome se ono nalazi, t. j. uvek od centra kružne putanje. Ova sila kojom *telo dejstvuje* na ruku i konac . . .“ (str. 78). — „Nu one“ (centripetalna i centrifugalna sila) „nemaju istu napadnu tačku. Centripetalna sila dejstvuje *na telo koje se kreće*, a centrifugalna *na mehanizam kojim je telo spojeno sa centrom*“ (str. 79). Međutim, na dnu iste strane, u sl. 116, centrifugalna sila ima hvatište u težištu vagona na krivini.

I Sokolov ističe, da centripetalna i centrifugalna sila imaju različita hvatišta, pa naglasuje, da „centrifugalna sila napada na vezu“ (str. 186). U slučaju okretanja utega na vrpci, centrifugalna sila napada na vrpcu (ibid.). Razlog je tome III.

---

[6]) Lukatela-Ogrizović, l. c., str. 87, zad. 8.

[7]) Sokolov, l. c., srp. izd., str. 206., maked. izd., str. 251.

[8]) J. Mihailović, Eksperim. fizika (za niže razrede), 4. izd., Beograd 1915, str. 30.

[9]) M. Popović, Fizika, Beograd 1926, str. 78; 4. izd., Beograd 1936, str. 77.

[10]) Lj. Šplait, Fizika za niže razrede, Zagreb 1929, str. 26.

[11]) O. Kučera, Eksperim. fizika (za više razrede), Zagreb 1902, str. 82. Međutim on definira: „Centrifugalna sila je dakle otpor ustrajnosti proti gibanja u krivulji“ (kurziv).

[12]) J. Mihailović, Eksperim. fizika sa meteorologijom, knjiga za VII. razred, Beograd 1925, str. 78—79. „Ta težnja tela, rezultat njegove energije, da se kreće po tangenti, naziva se *tangencijalna sila*“. — Radi objašnjenja treba nadodati, da Mihailović i energiju često naziva silom (str. 55, 292).

Newtonov zakon; drugo tijelo je vrpca ili uopće materijalna veza između tijela, koje se okreće, i središta.

U ovom slučaju treba postaviti pitanje: gdje je onda hvatište sile u primjerima, gdje između tijela, koje se okreće, i središnjeg tijela nema materijalne veze? N. pr. kod okretanja planeta oko Sunca, ili kod okretanja elektrona oko atomske jezgre u Bohrovom atomskom modelu (poznato je, da Bohr neposredno primjenjuje centrifugalnu silu, koja djeluje na elektron).

Manje je jasno pitanje hvatišta u knjizi Lukatele i Ogrizovića: „Uslijed ustrajnosti tijelo nastoji da se udalji od središta i radi toga *djeluje na tijelo oko kojega se kreće*“ (moj kurziv); zbog toga se javlja „sila uperena od središta prema periferiji u smjeru polumjera“ (str. 85). Po ovome mi se čini, kao da je hvatište centrifugalne sile zamišljeno u središnjem tijelu.

Kod Kučere i kod Hondla pitanje hvatišta centrifugalne sile nije pobliže izraženo. U dodatku u „bilješci“ (str. 82) Kučera se ograđuje protiv pomisli, „da na tijelo, koje leti po kružnici, zaista djeluje neka osobita sila, koja ga tjera od središta“.

Napokon u našu literaturu je ušao i izričiti zastupnik misli, da je hvatište centrifugalne sile u središtu, oko kojega se materijalna tačka okreće. To je doduše već izričito univerzitetski udžbenik[13]); navodim ga radi bolje potpunosti. „Ova tzv. centrifugalna sila $+mr\omega^2$ ne napada dakle stvarno obrtno telo, već usled njegove inercije ide od njega i *napada centar obrtanja*“[14]). To je ilustrirano slikom 20 *b*, gdje sila $+mr\omega^2$ stvarno ide iz središta. Razlog tome nalazi Westphal u III. Newtonovom zakonu, koji on primjenjuje drukčije nego Sokolov: jedno tijelo jest tijelo, koje se okreće, a drugo je tijelo ono u središtu. Šljivić prenosi Westphalovu misao o III. Newtonovu zakonu, pa pridodaje: „ona nije ništa drugo do reakcija centripetalne sile“. Šljivićev dodatak iz prvog citata „usled njegove inercije“ ne slaže se na ovom mjestu dobro s Westphalovom mišlju. Međutim u nastavku, na str. 30, kada rezimira promatranje stvari s gledišta opažača, koji se giba s tijelom koje se okreće, Šljivić sasvim odstupa od Westphala i postavlja pravilan zaključak: „Centrifugalna sila je *reakcija obrtnih masa na ubrzavajuće dejstvo* centripetalne sile, shodno trećem Njutnovu aksiomu, dakle *sila inercije*“ (kurzivi su od mene). Ali to se opet ne može dovesti u sklad s hvatištem centrifugalne sile u središtu vrtnje. — Westphal, s istog gledišta opažača u gibanju, samo napominje nastajanje inercijalnih

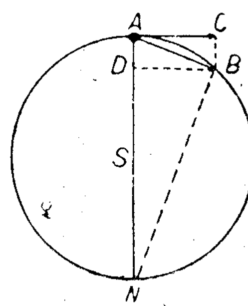
[13]) W. Westphal, Fizika, Beograd 1947, srpski prevod (djelomično preradba) prvog dijela, od S. Šljivića, str. 28—29. Prema: W. H. Westphal, Physik, 7—8. izd., Berlin 1941, str. 73—74.

[14]) U originalu: „am Drehungszentrum“ (greift) „vom rotierenden Massenpunkt ausgehend, die Zentrifugalkraft $k' = -k = +mru^2$“. — Slika, koju dalje spominjem, u originalu je sl. 61.

sila, jer ih je on obradio u početku knjige. — Napokon, na drugom mjestu i original i prevod sasvim odstupaju od hvatišta centrifugalne sile u središtu vrtnje, kod tumačenja rotacionog paraboloida slobodne površine tekućine u vrtnji (str. 123, sl. 120, odnosno str. 83, sl. 61), gdje je hvatište centrifugalne sile prikazano u samoj tekućini, izvan središta. — Ovakve prelaze, kao ni onaj kod Popovića đak ne može shvatiti.

U vezi s ovim, treba da se pozabavimo i načinima, kojima naši srednjoškolski udžbenici izvode formulu za centripetalnu akceleraciju. Hondl[15]) i Sokolov[16]) služe se Hamiltonovom metodom hodografa. Kučera (str. 80), Dukić (str. 31), Popović (str. 77), Lukatela-Ogrizović izvode tu formulu na osnovu sl. 1, koju prenosim iz ove posljednje knjige (str. 83, sl. 73)[17]). Mihailović se služi jednom varijantom ovog postupka[18]).

Ova druga metoda nije fizički ispravna. Osnovna joj je pogreška u tome, što je sila samo u tački A uperena prema središtu; s napredovanjem prema B mora se pretpostaviti i jedna ekscentrična sila. Zamislimo opažača, koji se giba linearnom brzinom c po luku AB. U trenutku njegova prolaza kroz A neka je istom brzinom c izbačena iz A tangencijalno jedna kuglica (smjerom AC). U tački B opažač zapaža, da kuglica (u C) nije nad njegovom glavom, nego da je zaostala. On mora doći do zaključka, da njegovo gibanje, pored centralne, ima i jednu tangencijalnu akceleraciju, pa će zaključiti, da tu tangencijalnu akceleraciju izvodi jedna ekscentrička sila.



Sl. 1

15) Hondl, l. c., str. 59, odnosno str. 30—31.

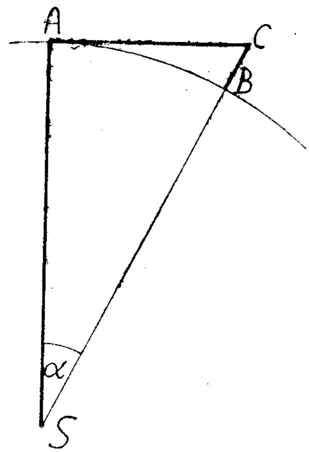
16) Sokolov, l. c., str. 183.

17) Cijeli račun je najkraće i najpreglednije izveden u toj knjizi, pa ga odatle prenosim.

„Tijelo se giba po kružnici (sl. 73) jednolikom brzinom c. Za neko vrijeme t prevalit će tijelo luk AB. Ako je to vrijeme dosta kratko, može se uzeti mjesto luka $\widehat{AB}$ pripadna tetiva AB. Ta je tetiva kao put kod jednolikog gibanja $c . t$. — Po zakonu ustrajnosti, zadržalo bi tijelo smjer, koji je imalo u točki A i proslijedilo bi u smjeru tangente do točke C. No kako se je tijelo gibalo po putu AB, zamišljamo, da je taj put sastavljen od putova AC i AD. Put je AC zbog ustrajnosti, a put AD uslijed djelovanja centripetalne sile. Pod utjecajem te sile dobiva tijelo akceleraciju, pa će put AD, kao put kod jednoliko ubrzanog gibanja biti $\frac{a}{2} t^2$. Iz pravokutnog trokuta ABN (poučak o kateti !) $AB^2 = AD . AN$, ili $(ct)^2 = 2r . \frac{a}{2} t^2$. — Prema tome je akceleracija $a = \frac{c^2}{r}$“.

18) Mihailović, l. c.[12]), str. 78.

Fizički i geometrijski ispravno je ovakvo elementarno izvođenje (sl. 2). Zbog jednakosti tg α sa arc α za malene kutove α, odnosno za vrlo kratke vremenske razmake Δt, kuglica izbačena pravcem tangente nalazi se cijelo to vrijeme u produženju polumjera, na kojem se nalazi opažač u gibanju po luku AB, koji je iz A krenuo istodobno s istom brzinom c. Na kraju vremenskog razmaka Δt opažač je u B, a kuglica je u C. U stvari, kroz to cijelo vrijeme Δt djeluje na kuglicu centripetalna sila i daje joj radijalno uperenu akceleraciju a; prema tome je konačni radijalni put, koji bi kuglica prevalila i padajući izravno od C do B, jednak $\frac{a}{2} \cdot \Delta t^2$. Onda po Pitagorinom pravilu imamo iz trokuta ACS:



Sl. 2

$$\left(r + \frac{a}{2} \cdot \Delta t^2\right)^2 = r^2 + (c.\,\Delta t)^2.$$

Poslije kvadriranja, zanemarujući Δt^4, imamo odatle: $a = \frac{c^2}{r}$.

Sličan postupak upotrebljava kod nas J o v a n o v i ć[19]). U suštini isto izvođenje upotrebio je W e s t p h a l[20]) u svojoj knjizi i popratio ga je slikom, koja odgovara slici 2.

II

Prosuđivanje o sili zavisi uopće o stanovištu opažača. Ako se dva opažača nalaze u relativnom gibanju jedan prema drugome, njihovi će se iskazi o sili, koju opažaju, podudarati samo onda, ako je njihovo relativno gibanje jednoliko pravocrtno. Jednakost iskaza o sili ne važi za dva opažača, koji bi se jedan prema drugome nalazili u ubrzanim gibanjima. Ekstremno nejednake iskaze o sili, koju opažaju, dat će dva opažača, od kojih jedan miruje, a drugi sudjeluje u ubrzanom gibanju. Promatrajmo to u konkretnom primjeru jednolike vrtnje u krugu. Jer gibanje u krugu pripada među ubrzana gibanja; akceleracija u ovom slučaju je ona, koju zovemo centripetalnom.

---

19) D. K. J o v a n o v i ć, Elementarna fizika, Beograd 1948, str. 29—30.

20) W e s t p h a l (njemački original), l. c., str. 75, sl. 64. Š l j i v i ć (str. 29) izvodi — uz kritičke korekture — na osnovu slike 20 c, koja odgovara slici 1. — U originalnom W e s t p h a l ovom (strogom) izvođenju ne dolazi korektura potencije Δt^4, koja se pojavljuje u gornjem elementarnom izvođenju.

Opažač, koji bi se gibao zajedno s pločom, koja rotira, a ne zna za rotaciju, i pri tom bi opažao vladanje slobodne kuglice, koja stoji pred njim na ploči, opazio bi, da kuglica bježi radijalno od središta. On bi morao upotrebiti n. pr. elastičnu spiralu, da bi kuglicu zadržao na miru. Po istezanju te spirale on bi mogao statički mjeriti tu silu, koja djeluje na kuglicu, i nazvao bi je po njezinom smjeru centrifugalnom. On bi tu silu mogao mjeriti i dinamički, ako bi promatrao gibanje na dovoljno kratkim radijalnim razmacima, na kakvima bi se promjena radijalne daljine dala zanemariti (ujedno, da bi mogao zanemariti odstupanja zbog djelovanja Coriolisove sile), jer bi našao, da je u takvim razmacima radijalno gibanje kuglice jednoliko ubrzano[20]*a*). Iz toga svega on bi izveo zaključak, da stvarno postoji jedna radijalna sila, usmjerena prema van.

Opažač, koji miruje i promatra te eksperimente izvana, ne bi znao izravno objasniti istezanje spirale, kojom je kuglica vezana. Kad bi ploča na svojoj periferiji imala žlijeb s vodom, a žlijeb bi periferno imao rupica, on bi našao, da mlazovi vode iz tih rupica izlijeću tangencijalno. To tangencijalno gibanje on bi objasnio djelovanjem inercije, pa bi dosljedno i silu, koja isteže spiralu, nazvao *inercijalnom silom.* On tu silu može označiti i fiktivnom silom, izmišljenom zato, da bi objasnio zapažene posljedice, kojih drukčije ne zna objasniti.

U tome je razlika između jednog i drugog opažača. Opažač, koji sudjeluje u rotaciji, direktno osjeća i može da mjeri centrifugalnu silu, pa je ona za njega stvarna sila. Tako je osjeća i mjeri tzv. centrifugalni dinamometar u vrtnji na centrifugalnom stroju. Opažač, koji miruje, opaža je samo po njezinim posljedicama, za koje izmišlja uzroke; ali tim će njegovo tumačenje nositi karakter nepotpunosti, jer on nema kvantitativnih mjerenja. Međutim, on će imati povjerenja u opažanja opažača, koji sudjeluje u kružnom gibanju, pa će za te posljedice rotacije prihvatiti ono tumačenje, koje daje taj opažač na osnovu svojih mjerenja, kada sazna za rotaciju, i složiti će se s njim, da je centrifugalna sila stvarna inercijalna sila, uperena radijalno od središta, koja se javlja kod rotacije. Između njihovih tumačenja ostat će samo formalna razlika: ravnoteža između kuglice i nategnute spirale bit će za opažača u rotaciji statička; za opažača u mirovanju ona je dinamička.

Iz ovih dvaju različitih stanovišta dolazi jedan dio navedenih razlika u izlaganjima među pojedinim udžbenicima. Svi je pripisuju inerciji materijalne tačke u kružnom gibanju, t. j. težnji gibanja u smjeru tangente. Međutim, tu težnju gibanja u smjeru tangente opaža samo opažač, koji miruje. Za opažača, koji

---

[20]*a*). Ustvari je gibanje kuglice u dodiru sa pločom na većim radijalnim razmacima, gdje se Δr ne može zanemariti prema r, nejednoliko ubrzano zbog porasta akceleracije sa r.

sudjeluje u rotaciji istom kutnom brzinom, nema tangencijalnog pomaka; tako i mlazovi vode iz perifernog žlijeba za njega izlijeću radijalno[21]).

Centrifugalna sila je samo specijalan primjer inercijalne sile. Inercijalnu silu uveo je Newton odmah u početku svog glavnog djela *„Principia“* (u 3. definiciji) kao silu prirođenu materiji: „U materiji je usađena sila sposobnosti odupiranja; po njoj svako tijelo, u koliko to stoji do njega, ustraje u svom stanju ili mirovanja ili jednolikog gibanja u pravcu“ [22]). Nadodaje, da je uvijek proporcionalna masi, te da nema razlike između nje i inercije mase *(inertia massae)* osim u načinu shvaćanja. U nastavku predlaže za nju naziv inercijalne sile kao vrlo značajan („Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis inertiae dici possit“), a na jednom tijelu dolazi do izražaja „samo kod promjene njegova stanja, koju proizvodi druga vanjska sila, koja na nj djeluje“[23]).

Osim osnovne povezanosti između I. i II. zakona gibanja, inercijalna sila ne igra u Newtonovu djelu znatnije uloge. Malo iza Newtona istaknuo je ulogu inercijalnih sila D'Alembert (1743.) u principu nazvanom njegovim imenom; možemo ga izreći u pojednostavljenom obliku ovako: Ako na tijelo djeluju ma koje sile, one su u *dinamičkoj* ravnoteži s inercijalnim silama, koje su suprotnih smjerova. — U najjednostavnijem slučaju, gdje na materijalnu tačku djeluje jedna sila f, imamo po D'Alembertovu principu:

$$f + U = 0$$

gdje je U inercijalna sila.

Međutim je po II. Newtonovom zakonu: $f = ma$; prema tome je:

$$U = -ma$$

Ravnoteža je dinamička, ne statička, jer inercijalna sila postoji samo dok postoji akceleracija, proizvedena silom f.

Dok je Newton inercijalnom silom povezao svoj I. i II. zakon gibanja, ovim je D'Alembertovim dodatkom III.

---

[21]) Ako u citiranoj definiciji Kučerinoj, l. c. [11]), „otpor ustrajnosti“ identificiramo sa silom ustrajnosti, onda je samo njegova definicija tačna. U nastavku on ispravno u tom smislu nastavlja: „centrifugalna sila je dakle reakcija proti centripetalnoj akceleraciji“ (sporednu ulogu ima njegova pogreška o II. Newtonovu zakonu kao uzroku jednakosti). Ali s tim dolaze u sukob njegovo objašnjenje u „bilješci“, gdje se on protivi tome, da bi „otpor ustrajnosti“ djelovao „na onu masu, koja taj otpor izvršuje“, kao i prije navedeni citat iz iste bilješke.

[22]) „Definitio III. Materiae vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum“.

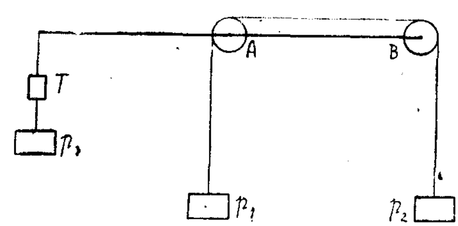
[23]) „Exercet vero corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta“.

Newtonov zakon gibanja, u svojoj prvoj stilizaciji, gdje se ne traži *drugo* tijelo („djelovanju je uvijek jednako i suprotno protudjelovanje“[24]), povezan s I. i II. zakonom. Osim toga, on je tim dobio universalan značaj; jer inercijalna sila nastupa sada u istom tijelu kao reakcija vanjskoj sili, koja proizvodi akceleraciju. Tim je odmah pojačana i vrijednost II. Newtonova zakona. Jer na prvi mah nije jasno, zašto ne bi konstantna sila, djelujući na jedno tijelo, proizvodila akceleraciju, koja bi rasla n. pr. s trajanjem djelovanja sile; međutim, tu je inercijalna sila $U = -ma$, koja vanjskoj sili trajno drži dinamičku ravnotežu.

Newton se još jednom kasnije, na kraju svog djela *„Opticks“* (1704.), u 31. pitanju, navratio na inercijalnu silu. On na tom mjestu uprav objašnjava ovu osnovnu ulogu inercijalne sile[25]): „Inercijalna sila je jedan pasivni uzrok, po kojemu tijela... primaju gibanje proporcionalno sili, koja ga prouzrokuje“. — Pod riječju „gibanje“ treba ovdje razumjeti akceleraciju.[25a])

Inercijalna sila je pojava dnevnog iskustva. Osjećamo je u vožnji kod svakog početka kretanja ili kod kočenja i kod svake promjene brzine (kao što pri vožnji centrifugalnu silu osjećamo na svakom zavoju). Može narasti do katastrofalnih razmjera kod vrlo brzog kočenja, t. j. gdje $-a = \frac{dv}{dt}$ postane vrlo veliko, n. pr. u sudaru vozova. Sa svim tim, u našim srednjoškolskim programima — koliko mi je poznato — nije zastupljena. Držim, da svi razlozi zagovaraju potrebu da je se uvede; jer bez nje je dinamika nepotpuna.

Inercijalnu silu lako demonstriramo Poggendorffovom vagom (sl. 3). To je poluga jednakih krakova, koja na jednom svom kraju i u osovini nosi dva lako gibljiva, užljebljena kotačića. Preko ovih je proveden konac, koji nosi



Sl. 3

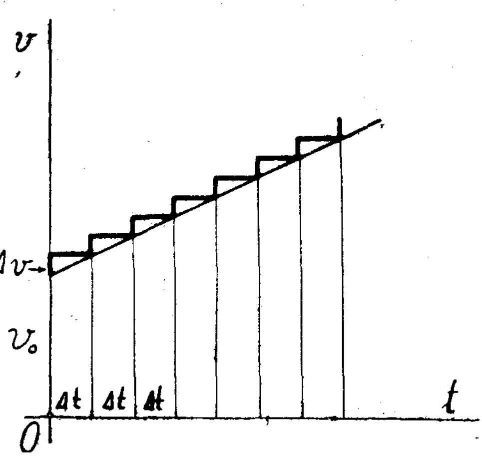
24) „Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem“.

25) Newton, Opticks, III, Qu. 31; citiram to mjesto prema jednom od posljednih izdanja, London 1931, str. 397: „The *Vis inertiae* is a passive Principle by which Bodies persist in their Motion or Rest, receive Motion in proportion to the Force impressing it and resist as much as they are resisted. By this Principle alone there never could have been any Motion in the World“. — Ja sam spacionirao riječi u gornjem prevodu.

25a) Newton ovdje upotrebljava riječ *„motion“* u istom smislu, kako je prije riječju *„motus“* u svojoj stilizaciji II. zakona gibanja zamijenio dulji izraz *„quantitas motus“*, kojim je bio nazvao veličinu gibanja *mv* u svojoj II. definiciji, gdje je ta veličina definirana. Ako tijelo od sile „prima veličinu gibanja“, to prema II. zakonu gibanja znači povećavanje pozitivno ili negativno njegove brzine, t. j. akceleraciju.

tegove $p_1 = p_2$, a na drugom kraju visi teg $p_3 = p_1 = p_2$, tako da je poluga — nakon tariranja težine kotačića B tarom T — u ravnoteži. Povlačenje tega p_1 ne remeti po sebi ravnotežu poluge, jer sila djeluje samo na osovinu A[26]. Isto tako, poluga ostaje u ravnoteži, ako teg p_1 jednoliko povlačimo naniže ili naviše, čim se teg p_2 jednoliko giba naviše, odnosno naniže. Ali ako teg p_1 naglo trgnemo naniže, krak vage AB dobije nagao otklon naniže. Tumačenje: teg p_2 dobio je akceleraciju naviše; tim se u njemu pojavila inercijalna sila $U = -ma$, uperena naniže, i ravnoteža poluge se promijenila, kao da je teg p_2 najednom postao teži. Obrnuto, ako p_1 naglo dignemo naviše, krak AB se naglo otkloni naviše, jer je sada inercijalna sila u tegu p_2 usmjerena prema gore. Možemo dobiti i više-manje konstantne otklone, ako sistem tegova p_1, p_2 dovedemo u jednoliko ubrzano gibanje tim, da p_1 opteretimo sa još 20 grama, pridržimo ga rukom i ispustimo ga (otklon kraka AB naniže kao u prvom slučaju); ili: tegove p_2 i p_3 jednako povećamo za kojih 20 grama, teg p_1 pridržimo i ispustimo (otklon kraka AB naviše).

Đaku će činiti poteškoća shvaćanje dinamičke ravnoteže; odnosno, on će teško shvatiti isto ono, što se ispoljilo i u zagrebačkom pitanju, koje sam spomenuo u početku: ako imamo dvije jednake i suprotne sile, koje su prema tome u ravnoteži, kako onda nastaje jednoliko ubrzano gibanje?



Sl. 4

Poteškoću ćemo ukloniti, ili bar ublažiti, sličnim elementarnim postupkom, koji se često upotrebljava za uvođenje pojma akceleracije kod jednoliko ubrzanog gibanja. Djelovanje sile f rastavljamo u niz jednakih momentanih impulsa, kako to čini n. pr. Born[27]. Recimo (sl. 4), da se brzina v_0 u trenutku $t = 0$ skokom poveća za Δv. Zbog porasta brzine odmah se pojavi jednaka inercijalna sila uperena

[26]) Djelovanje težina p_1 i p_2 prenosi se na osovine A i B. — Poggendorffovu vagu možemo improvizirati s dovoljnom osjetljivošću iz poluge s poprečnim žbicama za vješanje tegova, kakvu često nalazimo u fizičkim kabinetima srednjih škola, ako ovu oslobodimo iz njezina stativa i objesimo je o osovini, pa preko osovine i skrajnje žbice provedemo konac s tegovima p_1 i p_2, a na drugom kraju objesimo p_3.

[27]) M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin 1922, str. 29, prema str. 25; hrvatski prevod (Zagreb 1948), str. 24, odnosno str. 21.

protiv djelovanja impulsa sile f i zaustavi ubrzano gibanje. Materijalna tačka bi se dalje gibala jednoliko brzinom $v_0+\Delta v$. Iza kratkog vremenskog razmaka Δt impulsom opet povećamo brzinu za Δv; uslijed toga javlja se inercijalna sila, koja zaustavi ubrzano gibanje; nastavlja se jednoliko gibanje brzinom $v_0+2\,\Delta v$; i t. d.

Već smo istaknuli, da je i centrifugalna sila inercijalna sila. Dovoljno je da pođemo s najopćenitijeg pojma akceleracije. Kod gibanja u bilo kojoj krivulji momentanu akceleraciju možemo rastaviti u dvije međusobno normalne komponente: u radijalnu, koja je uperena prema središtu zakrivljenosti krivulje u toj tački i odgovara polumjeru zakrivljenosti, a dolazi samo od promjene smjera brzine, i u tangencijalnu, uperenu smjerom gibanja, tako da je:

$$a^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_r^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)_t^2$$

gdje smo sa v označili linearnu brzinu, sa $\left(\frac{dv}{dt}\right)_r$ radijalnu, a sa $\left(\frac{dv}{dt}\right)_t$ tangencijalnu akceleraciju. Ako se materijalna tačka giba u krugu konstantnom kutnom brzinom[28]), onda je $\left(\frac{dv}{dt}\right)_t = 0$, a ostaje samo radijalna ili centripetalna akceleracija:

$$a = \left(\frac{dv}{dt}\right)_r = \frac{v^2}{r} = r\,\omega^2$$

gdje je ω kutna brzina. Linearna brzina v mijenja kod toga samo svoj smjer, a ostaje konstantna u svom apsolutnom iznosu. Promjena smjera brzine v u sekundi, to je centripetalna akceleracija. Njoj odgovara centripetalna sila kao uzrok. A zbog promjene smjera brzine, odnosno zbog pojave centripetalne akceleracije javlja se po D'Alembertovu principu inercijalna sila

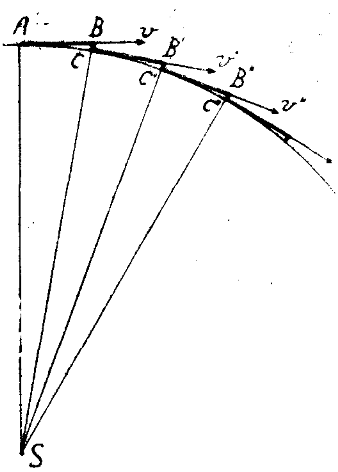
$$U = -m\left(\frac{dv}{dt}\right)_r = -m\frac{v^2}{r} = -mr\omega^2,$$

koja je usmjerena radijalno smjerom suprotnim centripetalnoj sili, t. j. usmjerena je radijalno od središta. To je centrifugalna sila.

---

[28]) Kod gibanja u krugu općenito ne mora kutna brzina ω biti konstantna; n. pr. nije konstantna kod prisilnog gibanja u vertikalnom krugu, koje izvodi kuglica u tzv. centrifugalnoj stazi.

Tim je odmah jednoznačno riješeno i pitanje njezina hvatišta: hvatište joj je u samoj materijalnoj tački ili odvojenom tijelu, koje se okreće oko središta vrtnje, jer linearna brzina te tačke ili tijela mijenja smjer. To jednako vrijedi za okretanje elektrona oko atomske jezgre u Bohrovu atomskom modelu, za okretanje Zemlje oko Sunca, za elemenat mase vode u vrtnji u čaši, kao i za okretanje kamena vezanog koncem oko ruke; materijalna veza kamena sa središtem okretanja u ovom posljednjem primjeru igra u pogledu centrifugalne sile samo nebitnu ulogu, koja ništa ne mijenja.



Sl. 5

Da bismo đaku i u ovom slučaju olakšali shvaćanje dinamičke ravnoteže između centripetalne i inercijalne sile, poslužit ćemo se analognim postupkom kao čas prije kod jednoliko ubrzanog gibanja. Djelovanje centripetalne i djelovanje inercijalne sile rastavljamo u mislima u niz kratkotrajnih impulsa. Vidi sl. 5. Od trenutka $t = 0$, kada se materijalna tačka nalazila u A s tangencijalnom brzinom v neka je kroz elementarni vremenski interval Δt djelovao centripetalni impuls. Materijalna tačka bi kroz to vrijeme stigla tangencijalnim pravcem do B; ali je istodobno pod djelovanjem centripetalnog impulsa pala do C. Zbog tim nastale promjene smjera brzine u smjer v' javlja se ravnotežna inercijalna sila uperena smjerom $C \to B$, koja zaustavlja padanje, i materijalna tačka nastavlja gibanje novim smjerom tangencijalne brzine v', koja nije promijenila svoj iznos. Novi centripetalni impuls kroz idući vremenski razmak Δt uzrokuje padanje materijalne tačke od B' do C'; ravnotežna inercijalna sila smjera $C' \to B'$ zaustavlja padanje, i t. d.

Tim je dat odgovor i na pitanje istodobnosti centripetalne sile, koje su neki udžbenici (1. c.[2]) bez potrebe istaknuli. Centripetalna sila i centrifugalna sila, kao inercijalna sila, odnose se kao uzrok i posljedica. Mi možemo stepenastim rastavljanjem uvijek zamisliti dovoljno sitan infinitezimalan vremenski interval Δt, kojim inercijalna sila zaostaje za silom, koja proizvodi akceleraciju i tim rađa inercijalnu silu.

Skopje, Fizički institut.

ON THE CENTRIFUGAL FORCE IN OUR TEXTBOOKS

By MARIN KATALINIĆ

Some errors about the centrifugal force occurring frequently in various intermediate school textbooks are criticised. In the second part the centrifugal force is explained as inertial force in its signification given by Newton and by D'Alembert, and caused by the centripetal acceleration.

Skopje, The Institute of Physics.