О ЈЕДНОЈ НЕПРЕКИДНОЈ ФУНКЦИЈИ БЕЗ ИЗВОДА

М. ТОМИЋ (Београд)

Граница

$$\lim_{h\to+0}\varphi(x,h)=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\{f(x+h)-f(x-h)\}\tag{1}$$

генералише појам првог извода. Тако, на пример, ако постоји леви и десни извод функције $f(x)$, тј. ако постоји

$$f'_{\pm}(x)=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\{f(x+h)-f(x)\}$$

тада је

$$\lim_{h\to+0}\varphi(x,h)=\frac{1}{2}\{f'_{+}(x)+f'_{-}(x)\}.$$

Овде ћемо слично класичном Weierstrass-овом примеру непрекидне функције без извода показати да за непрекидну функцију

$$f(x)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}\cos k!\,\pi x\tag{2}$$

а) *ни за једно ирационално* x *не постоји граница* (1);

б) *за свако рационално* x *граница* (1) *постоји.*

Принципом кондензације сингуларитета лако се може добити непрекидна функција $g(x)$ таква да гранична вредност (1) не постоји ако је x рационалан број, док за ирационалне x постоји. Тада је функција $f(x)+g(x)$, где је $f(x)$ дато са (2) непрекидна и нема граничну вредност (1) ни за једно x, дакле a f o r t i o r i нема ни први извод.

За доказ тврђења под а) потребна нам је ова лема

Лема. Нека је x *произвољан ирационалан број размака* (0, 1). *Тада постоји бесконачан низ целих бројева* $m_1<m_2<<m_3<\cdots$ *такав да*

$$m_k\sin m_k!\,\pi x\to\infty,\quad k\to\infty.\tag{3}$$

Доказ леме. Ако је

$$\sin m_k!\,\pi x = O(1/m_k)$$

тада је на основу Dirichlet-овог принципа (Schubladenprinzip)* x облика

$$x = \frac{p_k}{m_k!} + \frac{\theta_k}{m_k!\,m_k} \tag{4}$$

где је p_k цео број, а θ_k ирационалан број који не тежи ни нули ни јединици кад $k \to \infty$. Из (4) следи онда (3) ако се уместо m_k у (3) узме цео број m_k+1.

Ако је

$$\sin m_k!\,\pi x = o(1/m_k)$$

тада x има облик

$$x = \frac{p_k}{m_k!} + \frac{\theta_k}{l_k!}$$

где је l_k цео број $> m_k$, θ_k ирационалан број <1, и $l_k\theta_k \geqslant O(1)$ па се овај случај своди на претходни, тј. треба узети у (3) за m_k или l_k или l_k+1.

Доказ тврђења под а) *и* б). Функција $f(x)$ дата обрасцем (2) непрекидна је због униформне конвергенције реда.

Даље је

$$\begin{aligned}\varphi(x,h) &= \frac{1}{h}\{f(x+h)-f(x-h)\} = \\ &= -\frac{2}{h}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}\sin k!\,\pi h \sin k!\,\pi x.\end{aligned} \tag{5}$$

Нека је најпре x ирационалан број и нека је $h = 1/(m_r+1)!$ где је m_r цео број одређен тако да важи (3). Тада је $\sin k!\,\pi h = 0$ за $k \geqslant m_r+1$ па је

$$\varphi(x,h) = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{m_r}(k-2)!\,\frac{\sin\alpha_k}{\alpha_k}\sin k!\,\pi x, \tag{6}$$

где смо ставали $\alpha_k = \pi k!/(m_r+1)!$. Очевидно, $\alpha_k \to 0$, $m_r \to \infty$ за свако $k \leqslant m_r$, па према томе

* Види напр. J. F. Koksma: Diophantische Approximationen, Berlin, 1936, страна 5.

$$\frac{\sin\alpha_k}{\alpha_k}\to 1,\ m_r\to\infty \text{ за свако } k=1,2,3,\cdots,m_r. \tag{7}$$

У (6) је сада доминантан последњи члан над целим збиром, тј.

$$\varphi(x,h) = -\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\sin\alpha_{m_r}}{\alpha_{m_r}}(m_r-3)!(m_r-2)\sin m_r!\pi x\right\}+$$
$$+O\{(m_r-3)!\}.$$

Отуда према (3) и (7) следи да $|\varphi(x,h)|\to\infty, h\to 0$, тј. да у томе случају не постоји коначна гранична вредност (1).

Ако је x рационалан број, тј. ако је $x=p/q$ тада у обрасцу (5) отпадају сви чланови $\sin k!\pi x$ са индексом $k\geqslant q$. $\varphi(p/q,h)$ тежи дакле за свако $h\to 0$ коначној граници, тј. (1) постоји за свако рационално x.

M. Tomić (Beograd)

SUR UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

(Résumé)

On démontre que pour la fonction définie par (2) n'existe pas la limite (1) si $x\in(0,1)$ est un nombre irrationnel, et par contre que cette limite existe si x est rationnel c. à. d. de la forme p/q, (p et q entiers).

À l'aide du principe de condensation des singularités il est facile de construire une autre fonction continue $g(x)$ n'admetant pas (1) pour x rationnel. Alors la fonction continue $f(x)+g(x)$ n'a pas la limite (1) pour aucun $x\in(0,1)$.

On obtient ainsi une généralisation de l'exemple bien connu de Weierstass.
