О ЈЕДНОМ ПОСТУПКУ ЗА ДОБИЈАЊЕ АСИМПТОТСКИХ РАЗВИТАКА

С. АЉАНЧИЋ (Београд)

1. Нека су низ функција $\Phi_\nu(\alpha)$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ и функција $F(\alpha, x)$, ова последња за свако $x > x_0$, дефинисани у размаку $a \leqslant \alpha \leqslant b$. Нека $F(\alpha, x)$ има у размаку (a, b) и за $x > x_0$ развитак

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(x)\,\Phi_\nu(\alpha). \tag{1}$$

Претпоставимо да сваки од коефицијената $c_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots$, има асимптотски развитак

$$c_\nu(x) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\gamma_\mu(\nu)}{q_\mu(x)}, \quad x \to \infty, \tag{2}$$

где низ функција $q_\mu(x)$, $\mu = 0, 1, \ldots$, образује скалу, тј.

$$q_\mu(x) > 0, \quad \frac{q_\mu(x)}{q_{\mu+1}(x)} \to 0, \quad x \to \infty \quad (\mu = 0, 1, \ldots).$$

Тада се поставља питање да ли и функција $F(\alpha, x)$, кад $x \to \infty$, има асимптотски развитак по скали $\{q_\mu(x)\}$ и када се овај може добити увођењем асимптотског развитка (2) у ред (1), и формалном изменом граничног процеса садржаног у (1) и граничних процеса којим је дефинисан асимптотски развитак (2), тј.

$$F(\alpha, x) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\Gamma_\mu(\alpha)}{q_\mu(x)}, \quad x \to \infty, \tag{3}$$

где је

$$\Gamma_\mu(\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\mu(\nu)\,\Phi_\nu(\alpha), \quad \mu = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

Ј. Карамата [2] дао је довољне услове који оправдавају овај поступак у случају када је $\Phi_\nu(\alpha)=e^{\nu\alpha i}$, $a=0$, $b=2\pi$, тј. када је (1) тригонометриски развитак функције $F(\alpha, x)$. С друге стране, аутор овог рада показао је у [1] под којим условима исти поступак важи када је $a=0$, $b=\pi$, и $\Phi_\nu(\alpha)$ су Legendre-ови полиноми $P_\nu(\cos\alpha)$. Од практичног значаја је чињеница се овај поступак сме применити и када редови (4), којим су дефинисани коефицијенти добивеног асимптотског развитка (3), дивергирају; тада треба узети њихов A-збир[1]), који на основу учињених претпоставки о коефицијентима $c_\nu(x)$ увек постоји. Шта више, поступак је примењљив и на функције $F(\alpha, x)$ које су приказане A-збиром редова облика (1).

У овом раду показаћемо како се наведени поступак може пренети на случај када су $\Phi_\nu(\alpha)$ ултрасферични полиноми $P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha)$ $(0<\lambda<1)$, који су дефинисани са

$$(1+2z\cos\alpha+z^2)^{-\lambda}=\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha)\,z^\nu.$$

За $\lambda=1/2$ ултрасферични полиноми своде се на Legendre-ове, те су тиме обухваћени резултати које смо добили у [1]. Доказ који овде дајемо у једном делу знатно је краћи од оног у [1].

2. Довољне услове за примену наведеног поступка даје

Став 1. *Нека је низ $\{a_\nu\}$ тотално монотон и нека низ $\{b_\nu(x)\}$ допушта за свако $\nu=0, 1, \ldots$ асимптотски развитак по скали $\{q_\mu(x)\}$*

$$b_\nu(x)=\sum_{\mu=0}^{m}\frac{p_\mu(\nu)}{q_\mu(x)}+o\{1/q_m(x)\},\quad x\to\infty, \tag{5}$$

где су $p_\mu(\nu)$, $\mu=0, 1, \ldots, m$, полиноми по ν чији степен није већи од s.

Ако постоји цео број $k\geq s$, такав да[2])

$$q_m(x)\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\nu^{\lambda-1}\left|\Delta^{k+1}b_{\nu-k-1}(x)\right|\to 0,\quad x\to\infty, \tag{6}$$

---

[1]) Ако ред $\Sigma\, a_\nu r^\nu$ конвергира за $0\leq r<1$ и сума му је $F(r)$ и ако постоји $\lim\limits_{r=1}F(r)=F$, број F је A-збир реда $\Sigma\, a_\nu$.

[2]) k-та диференција низа $\{c_\nu\}$, $\Delta^k c_\nu$, дефинисана је са

$$\sum_{\mu=0}^{k}(-1)^\mu\binom{k}{\mu}c_{\nu+\mu}.$$

тада за $0<\alpha<\pi$ *постоји*

(7) $$\lim_{r=1}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu(x) P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha)\, r^\nu = G(\alpha, x)$$

и $G(\alpha, x)$ *има асимптотски развитак облика*

(8) $$G(\alpha, x) = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{\Pi_\mu(\alpha)}{q_\mu(x)} + o\{1/q_m(x)\},\quad x\to\infty,$$

где је

$$\Pi_\mu(\alpha) = \lim_{r=1}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu p_\mu(\nu) P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha)\, r^\nu,\quad \mu=0, 1, \ldots, m.$$

Доказ. (I) За доказ става 1 потребна нам је следећа

Лема. *Нека ред*[1])

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu^{\lambda-1}\Delta^{k+1} b_{\nu-k-1}\quad (b_{-1}=b_{-2}=\cdots=b_{-k-1}=0)$$

апсолутно конвертира. Ако ставимо

(9) $$f(\alpha, r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha)\, r^\nu,\quad 0\leqslant r<1,$$

тада

1° *постоји* $\lim_{r=1} f(\alpha, r)$, *и*

2° $$|f(\alpha, r)| < M\frac{(\sin\alpha)^{-\lambda}}{|1-re^{i\alpha}|^{k+1}}\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu^{\lambda-1}|\Delta^{k+1} b_{\nu-k-1}|$$

$(0<\alpha<\pi,\ 0\leqslant r<1,$ *M не зависи од* α *и* $r)$.

Како је (в. на пр. G. Szegö [3], стр. 91)[2])

$$P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha) = \frac{2}{\pi}\sin\lambda\pi\ \mathrm{J}\left\{e^{i[n\alpha+l(\alpha)]}\int_0^1 \frac{t^{\nu+2\lambda-1}\,dt}{(1-t)^\lambda(1-te^{2i\alpha})^\lambda}\right\},$$

$$l(\alpha) = 2\lambda\alpha + (1/2-\lambda)\pi,\quad 0<\alpha<\pi,\quad 0<\lambda<1,$$

то је

$$f(\alpha, r) = \frac{2}{\pi}\sin\lambda\pi\ \mathrm{J}\left\{e^{il(\alpha)}\int_0^1\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (rte^{i\alpha})^\nu\right)\frac{t^{2\lambda-1}\,dt}{(1-t)^\lambda(1-te^{2i\alpha})^\lambda}\right\}.$$

---

1) Прим уз знак Σ значи да $\nu^{\lambda-1}$ за $\nu=0$ има вредност 1.

2) $\mathrm{J}\{z\}$ је имагинарни део броја z.

На основу идентитета

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = (z-1)^{-k-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^{k+1} u_{\nu-k-1} z^\nu$$

$$(u_{-1} = u_{-2} = \cdots = u_{-k-1} = 0, \quad |z| < 1)$$

добијамо

$$f(\alpha, r) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sin \lambda\pi \, \mathrm{J} \left\{ e^{il(\alpha)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^{k+1} b_{\nu-k-1} (re^{i\alpha})^\nu \int_0^1 \frac{t^{\nu+2\lambda-1}(1-te^{2i\alpha})^{-\lambda} dt}{(1-t)^\lambda (rte^{i\alpha}-1)^{k+1}} \right\}.$$

Према томе,

$$|f(\alpha, r)| \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta^{k+1} b_{\nu-k+1}| \int_0^1 \frac{t^{\nu+2\lambda-1} |1-e^{2i\alpha}|^{-\lambda} dt}{(1-t)^\lambda |rte^{i\alpha}-1|^{k+1}}$$

и на основу неједначине ([1], стр. 122)

(10) $$|1-tz| \geqslant {}^1/_2 |1-z|, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad |z| \leqslant 1,$$

налазимо

$$|f(\alpha, r)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta^{k+1} b_{\nu-k+1}| \frac{({}^1/_2)^{-\lambda} |1-e^{2i\alpha}|^{-\lambda}}{({}^1/_2)^{k+1} |1-e^{i\alpha}|^{k+1}} \int_0^1 t^{\nu+2\lambda-1} (1-t)^{-\lambda} dt,$$

одакле следи тврђење леме с обзиром да је

$$\int_0^1 t^{\nu+2\lambda-1} (1-t)^{-\lambda} dt = \frac{\Gamma(\nu+2\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\nu+\lambda+1)} \sim \Gamma(1-\lambda)\, \nu^{\lambda-1}, \quad \nu \to \infty.$$

(ii) Доказаћемо прво егзистенцију функције $G(\alpha, x)$ која је дефинисана са $\lim\limits_{r=1} H_x(\alpha, r)$, где је

$$H_x(\alpha, r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu(x) P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha) r^\nu.$$

По претпоставци, низ $\{a_\nu\}$ је тотално монотон, тј. задовољава репрезентацију

$$a_\nu = \int_0^1 t^\nu d\beta(t),$$

где функција $\beta(t)$ не опада у размаку $(0, 1)$. Тада се, за $0 \leqslant r < 1$, функција $H_x(\alpha, r)$ може написати у облику

$$H_x(\alpha, r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 t^\nu \, d\beta(t) \right\} b_\nu(x) \; P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha) \, r^\nu =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(x) \; P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha) \; (rt)^\nu \right\} d\beta(t) =$$

$$= \int_0^1 f_x(\alpha, rt) \; d\beta(t),$$

где је $f_x(\alpha, r)$ дато са (9) (једино што место b_ν стоји $b_\nu(x)$).

Функција $f_x(\theta, y)$, која је непрекидна за $0 \leqslant y < 1$, непрекидна је на основу леме и с леве стране у тачки $y = 1$, јер, према (6), конвергира ред

(11) $$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu^{\lambda-1} \,|\, \Delta^{k+1} b_{\nu-k-1}(x) \,|.$$

Она је, дакле, непрекидна у затвореном размаку (0, 1), па је дозвољено ставити

$$\lim_{r=1} \int_0^1 f_x(\alpha, rt) \, d\beta(t) = \int_0^1 \lim_{r=1} f_x(\alpha, rt) \; d\beta(t),$$

одакле следи

(12) $$\lim_{r=1} H_x(\alpha, r) = \int_0^1 f_x(\alpha, t) \; d\beta(t) \quad (= G(\alpha, x)),$$

чиме је доказано прво тврђење става.

Да би доказали друго тврђење става, поновимо претходни поступак заменивши $b_\nu(x)$ са

$$B_\nu(x) = q_m(x) \left\{ b_\nu(x) - \frac{p_0(\nu)}{q_0(x)} - \cdots - \frac{p_m(\nu)}{q_m(x)} \right\}.$$

Ово је дозвољено, јер је, на основу претпоставке о вези између највишег степена полинома $p_\mu(x)$, $\mu = 0, 1, \ldots, m$, и броја k,

(13) $$\Delta^{k+1} B_\nu(x) = q_m(x) \; \Delta^{k+1} b_\nu(x),$$

те са (11) конвергира и ред $\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu^{\lambda-1} | \Delta^{k+1} B_{\nu-k-1}(x) |$. Релација (12) своди се тада на

$$\lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu B_\nu(x) \; P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha) r^\nu =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x) \; P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha) t^\nu \right\} d\beta(t).$$

Користећи неједначину леме и неједначину (10), налазимо

$$\left| \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu B_\nu(x) \; P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha) r^\nu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x) \; P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha) t^\nu \right| d\beta(t) <$$

$$< M(\sin\alpha)^{-\lambda} \int_0^1 \frac{d\beta(t)}{|1 - te^{i\alpha}|^{k+1}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu^{\lambda-1} |\Delta^{k+1} B_{\nu-k-1}(x)| <$$

$$< M_1 \frac{(\sin\alpha)^{-\lambda}}{(\sin\alpha/2)^{k+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu^{\lambda-1} |\Delta^{k+1} B_{\nu-k-1}(x)|.$$

Како на основу (13) суму на десној страни можемо написати у облику

$$\sum_{\nu=0}^{k}{}' \nu^{\lambda-1} |\Delta^{k+1} B_{\nu-k-1}(x)| + q_m(x) \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \nu^{\lambda-1} |\Delta^{k+1} b_{\nu-k-1}(x)|,$$

то претпоставка (б) и чињеница да $B_\nu(x) \to 0$, кад $x \to \infty$, повлачи за собом

$$\lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu B_\nu(x) \; P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha) r^\nu \to 0, \quad x \to \infty.$$

Ако овде $B_\nu(x)$ опет изразимо помоћу $b_\nu(x)$, добићемо

$$q_m(x) \left\{ G(\alpha, x) - \sum_{\mu=0}^{m} \frac{\Gamma_\mu(\alpha)}{q_\mu(x)} \right\} \to 0, \quad x \to \infty,$$

што претставља друго тврђење става 1.

3. Услов (б) става 1 може се заменити другим, истина строжим, али зато погоднијим за примену.

Став 2. *Тврђење става 1 важи ако, задржавајући све остале претпоставке услов (б) заменимо са: постоји цео број $\varkappa > s$ такав да је за $\nu \geq \nu_0$ и $x \geq x_0$ $\varkappa$-та диференција $\Delta^{\varkappa} b_\nu(x)$ низа $\{b_\nu(x)\}$ позитивна и монотоно опада када $\nu \to \infty$, тј.*

$$\Delta^{\varkappa} b_\nu(x) \geq \Delta^{\varkappa} b_{\nu+1}(x) \geq 0, \quad \nu \geq \nu_0, \quad x \geq x_0.$$

Доказ. Показаћемо, да кад постоји такав цео број $\varkappa > s$, да је тада услов (б) става 1 испуњен за $k = \varkappa$. Заиста, тада је

$$q_m(x) \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \nu^{\lambda-1} |\Delta^{k+1} b_{\nu-k-1}(x)| \leq$$

$$\leq q_m(x) \sum_{\nu=k+1}^{\nu_0+k} \nu^{\lambda-1} |\Delta^{\varkappa} b_{\nu-k-1}(x) - \Delta^{\varkappa} b_{\nu-k}(x)| +$$

$$+ q_m(x) \sum_{\nu=\nu_0+k+1}^{\infty} |\nu^{\lambda-1} - (\nu-1)^{\lambda-1}| \, |\Delta^{\varkappa} b_{\nu-k-1}(x)| +$$

$$+ q_m(x) \sum_{\nu=\nu_0+k+1}^{\infty} |(\nu-1)^{\lambda-1} \Delta^{\varkappa} b_{\nu-k-1}(x) - \nu^{\lambda-1} \Delta^{\varkappa} b_{\nu-k}(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=k+1}^{\nu_0+k} \nu^{\lambda-1} q_m(x) \, |\Delta^{\varkappa} b_{\nu-k-1}(x) + \Delta^{\varkappa} b_{\nu-k}(x)| +$$

$$+ q_m(x) \Delta^{\varkappa} b_{\nu_0}(x) \sum_{\nu=\nu_0+k+1}^{\infty} |\nu^{\lambda-1} - (\nu-1)^{\lambda-1}| +$$

$$+ (\nu_0+k)^{\lambda-1} \cdot q_m(x) \Delta^{\varkappa} b_{\nu_0}(x) \to 0, \quad x \to \infty,$$

јер, како је $\varkappa > s$, то из (5) следи

$$q_m(x) \Delta^{\varkappa} b_\nu(x) \to 0, \quad x \to \infty.$$

НАВОДИ

1. S. Aljančić — Développement asymptotique des fonctions représentables par les séries de Legendre. *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe des sci.* 6 (1954), стр. 115—124.

2. J. Karamata — Sur certains développements asymptotiques avec application aux polynomes de Legendre. *Ibid.* 4 (1952), стр. 69—88.

3. G. Szegö — Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. XXIII, New York 1939.

S. Aljančić

EIN VERFAHREN ZUR ERZEUGUNG VON ASYMPTOTISCHEN ENTWICKLUNGEN

(Zusammenfassung)

Verfasser überträgt ein von J. Karamata [2] auf trigonometrische Reihen angewandtes Verfahren zur Erzeugung asymptotischer Entwicklungen, $(x \to \infty)$, auf nach ultrasphärischen Polynomen fortschreitende Reihen $\Sigma\, a_\nu\, b_\nu(x)\, P_\nu^{(\lambda)}(\cos\alpha)$. Für $\lambda = 1/2$ erhält man als Spezialfall Legendresche Reihen, die Verfasser bereits in [1] betrachtet hat; hier, im allgemeineren Fall $0 < \lambda < 1$, wird der Beweis kürzer als in [1] geführt. Das Resultat ist in folgenden zwei Sätzen zusammengefasst:

SATZ 1. *Es sei die Folge $\{a_\nu\}$ totalmonoton, und $b_\nu(x)$ gestatte für jedes $\nu = 0, 1, \ldots$ eine nach algemeiner Skala $\{q_\mu(x)\}$ (d. h. $q_\mu(x) > 0$, $q_\mu(x)/q_{\mu+1}(x) \to 0$, $x \to \infty$) fortschreitende asymptotische Entwicklung (5), wobei $p_\mu(\nu)$, $\mu = 0, 1, \ldots, m$, Polynome in ν von höchstens s-ter Ordnung sind. Gilt dann für ein ganzzahliges $k \geqslant s$ der Grenzübergang (6), so besteht der Grenzwert (7) und die dadurch definierte Funktion $G(\alpha, x)$ gestattet eine nach allgemeiner Skala $\{q_\mu(x)\}$ fortschreitende asymptotische Entwicklung (8).*

SATZ 2. *In Satz 1 kann man die Voraussetzung (6) durch folgende ersetzen: für ein ganzzahliges $\varkappa > s$ ist die $\varkappa$-te Differenz der Folge $\{b_\nu(x)\}$ positiv und abfallend.*
