Математички Билтен
Книга 5—6 (XXXI—XXXII), 1981—1982, (37—42)
Скопје — Југославија

SUR LA VALEUR PRINCIPALE DE L'INTÉGRALE IMPROPRE VI-IÈME NOTE

Kuzman Adžiev, Dragan Dimitrovski

Dans cet article nous continuons l'étude de la convergence des valeurs principales au sens de Cauchy des certaines classes des intégrales impropres. Nominalement, en constatant dans la litterature une abscence des critères de la convergence de l'intégrale impropre dans le cas où la fonction sousintégrale possède dans un intervale de l'intégration fini des pôles de l'ordre arbitraire, les limites de l'intégration étant des points réguliers, en perfectuant les méthodes de nos notes antérieures, particulièrement la III-ième et la cinquième ([1], [2]), s'appuyant sur le procédé donné dans Behnke-Sommer ([3]), nous proposons le théorème suivant, qui eclaircit cette question dans les circonstances assez larges au moyen du calcul des résidus de la théo rie des fonctions analytiques.

Théoréme: *Soit donnée une fonction $f(z)$ du variable complêxe z emplissante les conditions suivantes:*

1°. *$f(z)$ étant analytique dans le plan de complèxes élargi, éxepté dans un nombre fini des singularités isolées à la distance finie;*

2°. *Sur l'intervale $[a, b]$ de l'axe des réels, $f(z)$ possède un nombre fini des pôles : le pôle x_1 de l'ordre n_1, le pôle x_2 de l'ordre $n_2, \ldots\ldots, x_k$ de l'ordre n_k;*

3°. *$f(z)$ étant régulière obligatoirement dans les points $x = a$ et $x = b$.*

Alors, pour que la valeur principale au sens de Cauchy

$$v\,.\,p. \int_a^b f(x)\, dx$$

existe, il faut et il suffit que les sommes des coèficients laurentiens du developpement de la fonction $f(z)$ dans la série de Laurent autour des pôles x_j, $j = 1, 2, \ldots$

..., k; sur les places paires près des membres $(z-x_i)^{-2\nu}$ *soient égales à zéro; c'est à dire qu'il vaut:*

(1) $$\sum_j A_{-2\nu, j} = 0, \quad \nu = 1, 2, .., p$$

$$\text{où} \quad 2p = Max\ \{2p_1, 2p_2, \ldots, 2p_k\}$$

$2p_1, 2p_2, \ldots, 2p_k$ *marquant les nombres pairs maximums, moins ou égaux à* $n_1, n_2, \ldots, n_k$; *respectivement.*

Alors on peut calculer cette valeur principale au moyen de la formule suivante

(2) $$v.\ p. \int_a^b f(x)\ dx = \sum (B_{-1,j} + \pi i\ A_{-1,j}) + \underset{z\to\infty}{Res}\ f(z)\ ln\ \frac{b-z}{z-a} + \\ + \sum_{C \setminus [a,b]} \underset{\text{à la distance finie}}{Res'}\ f(z)\ ln\ \frac{b-z}{z-a}$$

oú $A_{-i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, n_j$; $j = 1, 2, \ldots, k$ *sont les coèficients laurentiens du développement de la fonction* $f(z)$ *autour des pôles* x_j, *près des membres* $(z-x_j)^{-i}$; $A_{-1,j}$ *étant spécialement le résidus de* $f(z)$ *relatifs aux pôles* x_j; *tandis que les* $B_{-1,j}$ *sont les résidus de la fonction*

$$f(z)\,.\,ln\,\frac{b-z}{z-a}$$

dans les mêmes points, que l'on peut calculer par la formule

(3) $$B_{-1,j} = A_{-1,j}\ ln\,\frac{b-x_j}{x_j-a} - \frac{A_{-2,j}}{1}\left[\frac{1}{x_j-a} - \frac{1}{x_j-b}\right] + \\ + \frac{A_{-3,j}}{2}\left[\frac{1}{(x_j-a)^2} - \frac{1}{(x_j-b)^2}\right] + \ldots\ldots + \\ + (-1)^{n_j-1}\,.\,\frac{A_{-n_j,j}}{n_j-1}\left[\frac{1}{(x_j-a)^{n_j-1}} - \frac{1}{(x_j-b)^{n_j-1}}\right]$$

Demonstration. Pour demontrer ce théorème, nous composons la fonction $f(z)$ $ln\ (b-z)/(z-a)$, où $ln\ (b-z)/(z-a)$ présente cette détermination du logarithme qui a la coupure sur le segment $[a, b]$ $(0 < \arg z \leq 2\pi)$, dans le but de l'intégrer suivant le contour donné sur l'image. Si nous introduisons les circles:

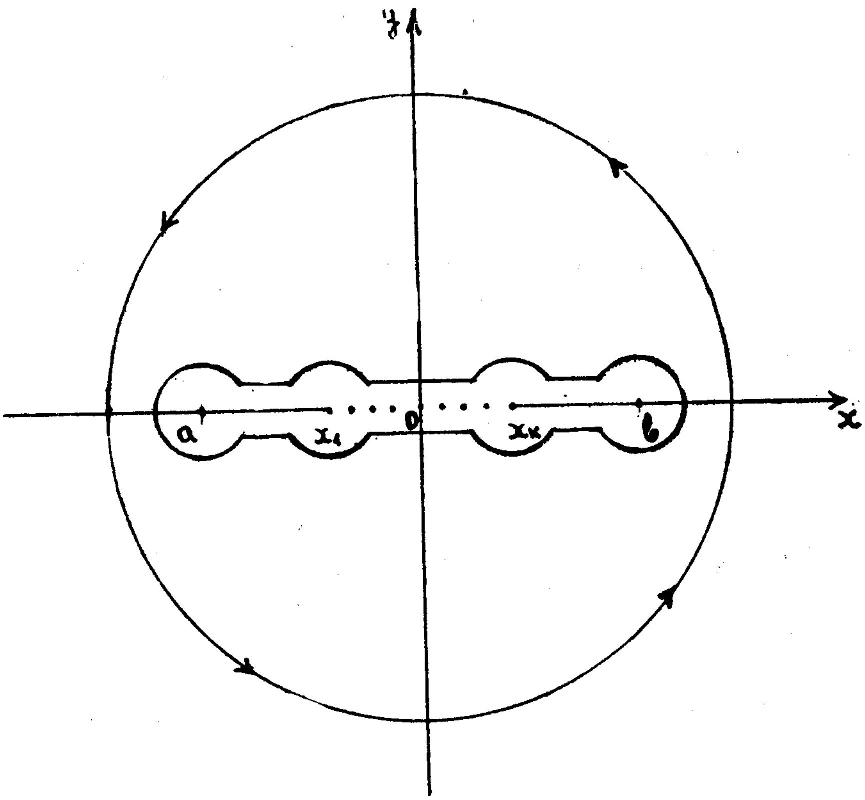
$$C_R : |z| = R,\ C_a : |z-a| = r;\ C_b : |z-b| = r;\ Cx_i : |z-x_i| = \\ = r;\ i = 1, 2, \ldots, k$$

supposant R étant si grand que C_r contient toutes les singularités de $f(z)$ sur C, et r si petit que C_a, C_b, C_{x_i} n'en contiennent nulle, un calcul des résidus fondé sur la formule de Cauchy nous donne:

$$\int_{C_R} f(z)\ ln\ \frac{b-z}{z-a}\,dz - \left[\int_{C_a} f(z)\ ln\ \frac{b-z}{z-a}\,dz + \right. \tag{4}$$

$$+ \int_{a+r}^{X_1-r} f(x)\ ln\ \frac{b-x}{x-a}\,dx + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{x_{j+1}}^{x_{j+1}-r} f(x)\ ln\ \frac{b-x}{x-a}\,dx +$$

$$\left. + \int_{x_k+r}^{b-r} f(x)\ ln\ \frac{b-x}{x-a}\,dx \right] - \left[\int_{C_b} f(z)\ ln\ \frac{b-z}{z-a}\,dz + \right.$$



$$+\int_{b-r}^{x_k+r} f(x)\left(ln\frac{b-x}{x-a}+2\pi i\right)dx+\sum_{j=1}^{k-1}\int_{x_{j+1}-r}^{x_j+r} f(x)\left(ln\frac{b-x}{x-a}+\right.$$

$$\left.+2\pi i\right)dx+\int_{x_1-r}^{a+r} f(x)\left(ln\frac{b-x}{x-a}+2\pi i\right)dx\Bigg]-$$

$$-\sum_{j=1}^{k}\int_{C_{xj}} f(z)\,ln\,\frac{b-z}{z-a}\,dz=2\pi i\sum \operatorname*{Res}_{\substack{C\setminus[a,\,b]\\ dist.\,finie}} f(z)\,ln\,\frac{b-z}{z-a}.$$

A l'égard aux suppositions sur le logarithme (sur la coupure supérieure de l'axe des x la fonction f (z) ayant la valeur f $(x)\left(ln\,\frac{b-x}{x-a}+2\,\pi i\right)$ on simplifie (4) et l'on obtient:

$$2\,\pi i\left[\int_{a+r}^{x_1-r} f(x)\,dx+\sum\int_{x_j+r}^{x_{j+1}-r} f(x)\,dx+\int_{x_k+r}^{b-r} f(x)\,dx=\right.$$

$$(5)\qquad =2\pi i\,\Sigma\;Res\,f(z)\,ln\,\frac{b-z}{z-a}-\int_{C_R} f(z)\,ln\,\frac{b-z}{z-a}\,dz+$$

$$+\int_{c_a}+\int_{c_b}+\sum_{j=1}^{k}\int_{c_{xj}} f(z)\,ln\,\frac{b-z}{z-a}\,dz\,.$$

Come il est évident:

$$(6_1)\qquad \int_{C_R} f(z)\,ln\,\frac{b-z}{z-a}\,dz=-2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\,ln\,\frac{b-z}{z-a}$$

aussi

$$(6_2)\qquad \left|\int_{c_a} f(z)\,ln\,\frac{b-z}{z-a}\,dz\right|\leqq 2\pi\,.\,Mr\,\big|\,ln\,r\,\big|\,.\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{ln^2\,r}}\to 0,r\to 0$$

alors

$$\int_{c_a} f(z)\,ln\,\frac{b-z}{z-a}\,dz\to 0;\;\int_{c_b} f(z)\,ln\,\frac{b-z}{z-a}\,dz\to 0,\;r\to 0,$$

et il nous reste de calculer la dernière somme dans (5), relative aux intégrales suivant C_{x_i}.

Supposant les dévelloppements de Laurent dans les bagues $0 < |z - x_i\diagdown < \delta$ des fonctions suivantes:

$$f(z) = \frac{A_{-nj, i}}{(z - x_j)^{n_j}} + \ldots + \frac{A_{-2, i}}{(z - x_j)^2} + \frac{A_{-1, i}}{z - x_j} +$$

$$+ A_{0, j} + A_{1, j}(z - x_j) + \ldots.$$

et

$$ln \frac{b - z}{z - a} = ln \frac{l - x_j}{x_j - a} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \left[\frac{1}{(x_j - a)^i} - \frac{1}{(x_j - b)^i} \right] (z - x_j)^i$$

on obtient, en multipliant, les séries

$$(7) \quad f(z)\, ln \frac{b - z}{z - a} = \sum_{i=0}^{\infty} A_{i, j}\ (z - x_j)^i + \sum_{i=-n_j}^{-1} B_{i, j}\ (z - xj)^i$$

et en intégrant suivant la longueu de C_{x_i}, on a

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{Cx_j} f(z)\, ln\ \frac{b - z}{z - a} dz = 2\pi i\ \{ \Sigma\ (B_{-1, j} + A_{-1, j}\ \pi i) +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{n_j} \frac{A_{-2m, j}}{r^{2m-1} . (2m - 1)}$$

Pour que la valeur limite de cette somme existe, quand r tend vers zéro, il est évidement nécessaire qu'il vaut (1):

$$A_{-2, 1} + A_{-2, 2} + A_{-2, 3} + \ldots + A_{-2, k} = 0$$

$$A_{-4, 1} + A_{-4, 2} + A_{-4, 3} + \ldots + A_{-4, k} = 0$$

(1) — — — — — — — — — — — —

$$A_{-2s, 1} + A_{-2s, 2} + A_{-2s, 3} + \ldots + A_{-2s, k} = 0.$$

A l'égard aux formules (6_1), (6_2), (6_3), (7) et (1); à partir de (5) on peut conclure que la formule (2) est valable, ce qu'il fallait demontrer.

Conséquence. *Les pôles* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *étant simples, les conditions* (1) *étant trivialement remplies, la valeur* $v.p. \int_a^b f(x)\,dx$ *existe, et l'on a la formule nouvelle*

$$v.\,p. \int_a^b f(x)\,dx = \sum A_{-1,j} \left(ln\, \frac{b - x_j}{x_j - a} + \pi i \right) +$$

$$+ \sum_{C \setminus [a,b]} \operatorname{Res} f(z)\, ln\, \frac{b-z}{z-a} + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\, lu\, \frac{b-z}{z-a}$$

dont une variante, au moyen d'une supstitution bilinéaire est donnée dans notre III-ième note ([1], p. 42).

LITTERATURE

[1] Dragan Dimitrovski, Miloje Rajović : Sur la valeur principale de l'intégrale impropre-III-ième note, Godišen Zbornik Prirodo-matem. fakultet Univ. Skopje, tome 25—26, (1975-76), section A, pp. 41—52.

[2] Dragan Dimitrovski, Miloje Rajović: Sur la valeur principale de l'intégrale impropre, V-ième note, Bulletin de la Société math. phys. de la RS de Macedoine, t. XXVI, 1976, pp. 19—24.

[3] Behnke — Sommer: Theorie der analytischen Funtionen einer komplexen Veranderlichen, zweite Veranderte Auflage. Berlin — Getingen — Heidelberg, 1962, p. 212—214.

[4] D. S. Mitinović, J. D. Kečkić: Košijev račun ostataka sa primenama. Monografija. Beograd 1979.

ЗА ГЛАВНАТА ВРЕДНОСТ НА НЕСВОЈСТВЕНИОТ ИНТЕГРАЛ VI НОТА

Кузман Ациев, Драган Димитровски

Резиме

Се предлага една до сега непубликувана теорема за егзистенција на главната вредност на несвојствениот интеграл во конечни граници, во случај кога во интервалот на интеграцијата подинтегралната функција има конечен број полови, овој пат од произволен ред. Врз основа на теоремата се дава и формулата (2) за конкретно пресметување на вакви врсти интеграли со помош на сметањето со остатоците. Можна е конструкција на голем број примери на класи конвергентни интеграли.