Математички Билтен
Книга 5—6 (XXXI—XXXII), 1981—1982 (43—46)
Скопје — Југославија

ЗА ЕДЕН НАЧИН НА НУМЕРИЧКО РЕШАВАЊЕ НА ОБИЧНИТЕ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ВО ВЕКТОРНО-МАТРИЧНА ФОРМА

В. Бабинкостов

Аналогно на [2], изразувајќи приближно една основна врска со помош на квадратурните формули во една нивна векторно-матрична форма, тука се добива една формула за нумеричко решавање на обичните линеарни диференцијални равенки, поинаква од оние во [1] и [2].

Имено, во [2], пресметувајќи ги во точките $x_i = ih \in [0,1]$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ nh = 1)$ вредностите $y_i = y(x_i)$ на функцијата

$$y(x) = \int_0^x f(\mathrm{t})\, dt \tag{1}$$

при дадена функција $f \in C\,\{[0, 1]\}$ со вредности $f_j = f(x_j)$ $(j = 0, 1, \ldots \ldots, n)$, со помош на една или друга квадратурна формула, се добива

$$y_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij}\, f_j + r_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{2}$$

каде што α_{ij} и r_i се соодветните коефициенти и остаточни членови, односно

$$Y = AF + R, \tag{3}$$

каде што $Y = \mathrm{colon}\ (y_0. y_1, \ldots, y_n)$, $F = \mathrm{colon}\,(f_0, f_1, \ldots, f_n)$, $R = \mathrm{colon}$ $(r_0, r_1, \ldots, r_n)$ се вектор-колони и

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & . & . & . & \alpha_{0n} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & . & . & . & \alpha_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & . & . & . & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

па на таа основа се прифаќа

$$Y \approx AF. \tag{$\tilde{3}$}$$

Ако на овој начин, при дадена функција $y \in C^{(m)}\{[0, 1]\}$ од аргументот $x \in [0, 1]$ чиј к-ти извод $y^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ има вредности $y_i^{(k)} = y^{(k)}(x_i')$ во точките $x_i = ih \in [0, 1]$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ nh = 1)$ ги пресметуваме вредностите на интегралите во равенството

$$y_i^{(k)} = y_0^{(k)} + \int_0^{x_i} y^{(k+1)}(t)\, dt, \tag{4}$$

добиваме

$$Y^{(k)} \approx y_0^{(k)} I + AY^{(k+1)}$$

каде што $Y^{(s)} = colon\ (y_0^{(s)}, y_1^{(s)}, \ldots, y_n^{(s)})$, $I = colon\ (1, 1, \ldots 1)$, односно

$$Y^{(m-1)} \approx y_0^{(m-1)} I + A\, Y^{(m)},$$

$$Y^{(m-2)} \approx y_0^{(m-\ )} I + y_0^{(m-1)} A I + A^2 y^{(m)},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$Y'' \approx y_0'' I + y_0''' AI + \ldots + y_0^{(m-1)} A^{m-3} I + A^{m-2} Y^{(m)}$$

$$Y' \approx y_0' I + y_0''' A^2 I + \ldots + y_0^{(m-1)} A^{m-2} I + A^{m-1} Y^{(m)},$$

$$Y \approx y_0 I + y_0' AI + y_0'' A^2 I + y_0''' A^3 I + \ldots + y_0^{(m-1)} A^{m-1} I + \\ + A^m Y^{(m)},$$

или

$$Y^{(m-\nu)} \approx \sum_{k=1}^{\nu} y_0^{(m-k)} A^{\nu-k} I + A^{\nu} Y^{(m)}, \tag{5}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Нека сега е дадена линеарната диференцијална равенка од m-ти ред

$$y^{(m)} + \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu\, y^{(m-\nu)} = f(x), \tag{6}$$

која при дадени функции $a_\nu \in C^{(m)}\{[0, 1]\}$, $f \in C\ \{[0, 1]\}$ од аргументот $x \in [0, 1]$ има единствено решение $y \in C^{(m)}\ \{[0, 1]\}$ што ги задоволува почетните услови

$$y^{(m-\nu)}(0) = y_0^{(m-\nu)} \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{7}$$

Барајќи дадената равенка (6) да е задоволена во точките $x_i = ih \in [0, 1]$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ nh = 1,\ n \geqslant m)$, имаме

$$y_i^{(m)} + \sum_{\nu=1}^{m} a_{\nu i}\ y_i^{(m-\nu)} = f_i, \tag{8}$$

односно

$$Y^{(m)} + \sum_{\nu=1}^{m} D_\nu\ Y^{(m-\nu)} = F, \tag{9}$$

каде што при вредностите $y_i^{(s)} = y^{(s)}(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $a_{\nu i} = a_\nu(x_i)$ е ставено $Y^{(s)} = \mathrm{colon}\,(y_0^{(s)},\ y_1^{(s)}, \ldots, y_n^{(s)})$, $F = \mathrm{colon}\ (f_0, f_2, \ldots, f_n)$, $D_\nu = \mathrm{diag}\text{-}(a_{\nu o}, a_{\nu 1}, \ldots, a_{\nu n})$.

Во таков случај, согласно со (5), равенството (9) дава

$$\left(E + \sum_{\nu=1}^{m} D_\nu\ A^\nu \right) Y^{(m)} \approx F - \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=1}^{\nu} y_0^{(m-k)}\ D_\nu\ A^{\nu-k}\ I,$$

од каде што ставајќи

$$B_m = E + \sum_{\nu=1}^{m} D_\nu\ A^\nu \tag{10}$$

и допуштајќи да е $det\ B_m \neq 0$, наоѓаме

$$Y^{(m)} \approx B_m^{-1} \left\{ F - \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=1}^{\nu} y_0^{(m-k)}\ D_\nu\ A^{\nu-k}\ I \right\} \tag{11}$$

Венесувајќи го последниов израз за $Y^{(m)}$ во (5) при $\nu = m$, добиваме

$$Y \approx \sum_{k=1}^{m} y_0^{(m-k)}\ A^{m-k}\ I + A^m\ B_m^{-1} \left\{ F - \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=1}^{\nu} y_0^{(m-k)} D_\nu\ A^{\nu-k}\ I \right\}. \tag{12}$$

Притоа, решавањето на конкретни равенки (6) покажува дека се добиваат резултати со задоволителна точност.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабинкостов В., За еден начин на применување на квадратурните формули при нумеричко решавање на обичните линеарни диференцијални равенки, Год. збор. Матем. фак., кн. 3;, Ск. 1979 г.
2. Нестерчук А. В., О решении обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с помощью операторов численного интегрирования, УМЖ, 17, 4, К., 1965 г.

ОБ ОДНОМ ПРИЕМЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

В. Бабинкостов

Резюме

В данной работе с помощью квадратурных формул в векторно-матричной форме, используя соотношение (5), получена формула (12) для численного решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений отличающаяся по своему виду от соответствующих формул в [1] и [2] и с практически удовлетворительной точностью.