

ЗА НЕКОИ ПРАШАЊА ОД СРЕДНОШКОЛСКАТА
НАСТАВА ПО МАТЕМАТИКА *

АНТОН БИЛИМОВИЌ

Во врска со доваѓањето на студентите од Скопскиот универзитет во Белград на дополнителни студии, професорот Д-р Драгослав Миџриновиќ ме замоли да одржам предавање за наставата на средношколската математика. Уважениот професор се обрна со таа молба токму до мене, изгледа, од два разлози: 1. бидејќи секогаш работев на тоа прашање теориски и практично и 2. бидејќи секогаш имав голем интерес за тие работи без оглед на тоа што сум професор по механика и што научно работам главно на механиката. Тоа интересување беше кај мене стално поврзано со гледиштето дека слично како што високи технички школи имаат за задача да спремаат инженери, така и универзитетот, во нашата гранка, има за конкретна цел спремање на наставници. Сè друго е отклонување од таа главна цел било во правец на спремање научни работници, било во правец на спремање математичари, нужни во други гранки на општествениот живот, за актуари, статистичари и др. Сметам дека гледиштето да универзитетот треба да се занимава само со теорија без врска со практичната примена на принципите од таа теорија во наставничката должност е старо, сколастично гледиште, кое треба да се напушти. Тоа не значи дека универзитетот треба да се претвори во учителска школа. Не. Универзитетот, во колку е тоа можно, треба да се занимава со современата научна математика, но, од една страна, треба да се подвлечат оние принципни прашања што стоат во врска со наставата на средношколската математика, а од друга, треба да ги запознае студентите со практичната работа на наставниците на сличен начин како што работат медицинарите на клиника со реален болесник, а не само со оние за кои читале во своите учебници. Вниманието

* Предавање одржано на 15 декември 1950 во Белград на студентите по математика од Скопскиот филозофски факултет; превод од српски јазик.

спрема средношколската математика треба нарочно да се уголеми поради недоволните, често пати многу слаби знаења на самата елементарна математика дури и меѓу наставниците математичари. И како универзитетски професор и како член на комисијата за професорски испити можам во полна мера да посведочам за слабото знаење на самите предмети од елементарна математика.

Универзитетска наука и средна школа. Постои мислење дека е унизително за еден универзитетски наставник да се занимава со средношколската математика. Такво мислење нема оправдание.

Прво, како во историскиот развото така и во современата состојба на математиката немало, а нема ни сега остра граница помеѓу таканаречената елементарна математика и таканаречената виша математика. Од една страна, *Еуклидовише елементи* беа книга достапна само на мудрите од Александриската Академија на науките; сега е содржината на таа книга многу помала од познанијата на современиот матурант. Од друга страна, поимот за „функција“ што доскор спаѓаше само во виша математика, стана тривијален поим на средна школа. Од материјалот на елементарната математика никнала вишата математика, а оваа пак во своето развотие влегувала сè подлабоко во сите гранки на човечките знаења, и со своите елементи влезе и во елементарната математика.

Второ. Како може да биде унизително да се занимаваме со елементарна математика кога со таа математика се занимавала цела низа чувени математичари. Да споменеме неколку имиња. *L. Euler* го напиша познатиот учебник по алгебра [1]. *A. M. Legendre* напиша елементарен учебник по геометрија [2], што многу години го заменуваше Еуклида не само во Франција туку и во други земји. Оставајќи го на страна минатото, да споменеме примери на прочуени математичари од крајот на XIX и од овој век што се занимавале со средношколската математика. *Felix Klein* ѝ посветува на елементарната математика цела низа книги и чланци. Тој активно работи на реформата на математичката настава. Неговото име е врзано со таканаречениот „*Мерански план*“, кој предлага низа принципни измени во математичката настава. Во Франција работат на елементарната математика исто така неколку светски познати математичари. Под редакцијата на *G. Darboux*, бившиот стален секретар на Француската Академија на науките, излегува збирка учебници на сите средношколски математички предмети. Два тома Геометрија во таа збирка пишува *J. Hadamard*. Најпосле треба да го споменеме *E. Borel* што со своите елементарни учебници створи нов правец во школската математичка литература.

Спрема тоа можеме да констатираме дека со средношколската математика се занимавала не само цела редица проучени математичари - научници, туку и повеќе: нови идеи за средношколската математика и нејзината методика потекнувале токму од универзитетски професори.

Ослонувајќи се на споменатите примери можеме и ние да имаме скроман интерес кон прашањата на наставата на средношколската математика и да се занимаваме без уни-
зување со тој наш *hobby*.

Познавање на елементарната математика и техничко владеење со математичкиот апарат. Обичновено познанијата од елементарната математика на наставникот се ограничуваат на оние познанија што ги добил, уште како ученик, за време на своето школување во средната школа. До најново време универзитетската математика, да речеме на Белградскиот универзитет, имаше многу слаба врска со елементарната математика. Меѓутоа, математика има своја историја, свој современ материјал и своја методика, која ги анализира сите методи и начини на излагање за да се постигне што поарно поставената цел, а и таа цел во разни школи може да биде различна. На универзитетот кандидатот за наставник обичновено не добива нови познанија од тие области. Обратно, дури по некогаш му ослабнуваат познанијата во поодделни партии од елементарната математика. Стапувајќи на должност наставникот треба преди сè да го понови материјалот што ќе го предава. При тоа тој избегнува да зема некој друг, нов, може би и многу поарен, учебник, различен од оној по кој тој сам во свое време студирал елементарната математика како гимназијалец, бидејќи не е сигурен да ли може да ги реши без тешкотии сите задачи од тој учебник или да ги докаже соодветните теореми онака како што тоа е докажано во новиот учебник.

Како да се бориме со тие недоволни познанија на елементарната математика кај самите наставници?

Освен многубројни учебници во светската литература постои и голема литература за наставника, за проширување познанијата во областа на елементарната математика. Постоат цели енциклопедии за елементарна математика [3] и постоат истории за елементарна математика во повеќе книги [4]. А да не зборуваме за цела редица списанија што се посветени на елементарната математика. Спрема тоа и кај нас треба да се појават книги посветени на елементарната математика за наставници, во кои школскиот материјал треба да биде продлабочен и анализиран исто така и од методско гледиште. Без оглед на тоа што немаме таква литература, секој наставник треба да ги пополнува своите познанија од онаа страна литература што му е достапна, за

тоа да води приобелешки и постојано да го подржува стремежот за усовршување.

Секој наставник мора не само да ги пополнува своите познанија, туку и да ја усовршува својата „математичка техника“. Секое расудување, секој доказ на една теорема, секоја трансформација треба да биде кај професорот не само безпрекорно правилна и најпроста, туку и „елегантна“ — а секој математичар добро знае што значи тоа. Примерот на професорот во таа смисла има огромно значење за учениците. Математичката техника треба да биде култивирана и кај учениците, таа треба да добије форма на спорт. Решување на многу тешки задачи, нарочно на такви кои бараат нарочна досетливост, треба да се подржуваат во иста мера како што се подржуваат спортски, шаховски и др. натпреварувања. За таа цел можат да бидат искористени нарочно конструктивните задачи, особено во просторот, што имаат огромно значење за развивање на просторните претстави.

Учебник и збирка на задачи. Само извонредно добри, долгогодишни, рутинирани професори можат добро да изведат една методска единица *ex promptu*, „од себе“, без претходно спремање. Треба да биде општо правило професорот да се спреми за секој час и тоа во извесна система, со извесен план. За основа на тој план може да служи или усвоениот учебник или добро разработен сопствен план. Најголеми тешкотии задава токму примената на таа тривијална истина. Некои професори не признаваат учебници — „Не чинат!“ — и ги заменуваат со свое изложување, за кое учениците водат свои забелешки. Често пати се врши тоа одстранување на учебниците поради тоа што во некоја партија професорот разработел нешто свое или, обратно, поради тоа што и за самиот професор учебникот е тежок, бидејќи не може да ги реши сите задачи од тој учебник. Сега е веќе во сите средни школи искоренет начинот на учење на некој предмет без соодветен учебник, и во колку наставничкиот кадар е послаб, во толку поголема улога игра учебникот. Без наставник-специјалист и без учебник нема школа. Младите наставници треба на првите чекори да се запрат на одбраниот учебник и да го разработуваат по него материјалот со учениците, а во исто време да ги собираат резултатите од својот практичен опит.

За својата планска редовна работа во училиштето треба да се води строга сметка. Еден од начините како да се регистрира работата во училиштето е институцијата на „тетратка што кружи“ (руски — круговая тетрадь). Во дебела, добро подврсана тетрадка се внесува сè што се работело на часот во класот; тоа е дневник, вистински дневник за работа. Целиот час запишува во неа еден ученик, но учениците

се менуваат не по однапред определен ред туку секој пат по изборот на наставникот. Таква тетратка е во исто време и контрола за наставникот, таа ја покажува целокупната работа и на класот и на наставникот. Праксата покажува дека водењето на таква тетратка ја зголемува сериозноста на работата за време на часот.

До последно време во школската пракса беа усвоени учебници од таков тип каде што на теоријата ѝ се додадени примери и задачи, но во релативно мал број; содржината на задачите го имаше предвид просечниот ученик. Добрите ученици немаа посложна материја на која би можеле да ги развиваат своите математички способности. За да се пополни таа празнина нужно е да се состават збирки од задачи во кои би имало повеќе задачи, почнувајќи од многу прости па до многу тешки што би биле за оние ученици што сакаат да ја испитаат својата математичка дарба, и ако таа постои, да ја развиваат.

Целта на наставата по математика. Погрешно е да се мисли дека целта на математичките предмети е само усвојување на содржината на тие предмети. Не. Школската математика треба да се смета како богато средство за подигнување на културата општо. Да спомнеме неколку особини на школската математика што ја потврдуваат споменатата особина на таа математика.

1. Култивирање активноста на мислите. Математиката не се усвојува пасивно. Секоја задача при самостојно решавање бара лична активност, движење на мислите. Математиката е, навистина, предмет што, речиси, не може да се „набуба“. Но и математичките задачи се разликуваат по тоа во каква мера бараат активност. Да го појасниме тоа на еден пример. Да се состави, да речеме, од услови на еден проблем квадратна равенка тоа е задача што бара активност и во колку задачата е потешка, во толку поголема. Но после тоа да се реши таа квадратна равенка и тоа со помошта на „набубаната“ формула, тоа е формална работа што не бара никаква активност, туку бара само увежбаност. Да ги пронајде во секоја област на школската математика некои прашања каде што учениците можат да ја применат својата активност, да ја побара таа активност при решавање на тие прашања, тоа е улогата на добриот наставник. Да не се земе предвид можноста преку математичкиот материјал да се култивира духовната активност на учениците, тоа значи да се одземе од школската математика нејзината огромна воспитна вредност.

И самото секојдневно изложување на математичкиот материјал треба да има не пасивна лекциона форма, туку

активна евристична форма, кога учениците, речиси, сами пронајдуваат големи математички истини и го преживуваат, заедно со наставникот, удоволствието на успешно стварање.

2. Култивирање на логиката. Математиката е, речиси, единствен средношколски предмет, во кој се ставува на прво место логиката. Логичкиот елемент истапува при дедукцијата на поважно место одошто го има самиот материјал на предметот. Затоа е многу важно секоја теорема да се докажува без секакви скокови; не во резултатите, туку во процесот на расудувањето е главно воспитно значење на математичката настава. Спрема тоа уобичаените, на пример, рачунски задачи во Геометријата треба да влезат во програмот, да бидат совладани, но само со тоа можеме да се задоволиме во нижите технички школи, каде што треба да се постигне само извесна практична цел, но не и во систематска средна школа што треба да се смета како претспрема за високи школи.

Логиката треба да се култивира не само во изводувањето на одделните ставови, теореми итн., туку и кај целокупната конструкција, кај општиот математички систем.

Да ја земеме, на пример, Геометријата.

Во докажувањето на секоја теорема постои определен логички ред и би бил страшен злочин кога на некое место во дедуктивното изложување на Геометријата би ја употребиле — не со цел на конкретна интерпретација, туку како логички елемент на доказот — индиската метода со „гледај“, т. е. ако вистината би ја утврдувале преку непосредно набљудение, по индуктивниот метод. Логичкиот ред треба да се прошири на целиот систем на преподавањето на геометријата во средната школа. *Логиката на системот* е исто толку важна како и *логиката на доказот*. Елементите на Геометријата се нужни уште во долните класови, но дедуктивните логички расудувања таму уште не се достапни, — излезот е во поделбата на наставата по геометрија на два циклуси, два концентри — на индуктивниот во долните класови и на дедуктивниот во горните. Да се мешат овие два системи, како што тоа го прават Германците од некои педагошки причини, тоа е исто таков злочин против логиката на системот каков што е горе споменатиот злочин против логиката на доказот. Методското прашање на наставата по геометријата во средни школи во многу земји уште стои нерешено, не е решено, на пример ни во Советскиот Сојуз. Таму не е уште одомашена една јасна претстава за логичката конструкција на првиот циклус на Геометријата (Астраб и др.) напореда со вториот циклус (Киселев и др.). Сметам дека кај нас тоа прашање е решено

правилно, само што треба исполувањето на различноста од двете системи на излагањето да биде спроведено што по-строго.

3. Култивирање на просторните претстави. Треба да појдуваме од фактот дека не само средношколците, не само студентите математичари, туку по некој пат дури и самите професори - аналитичари „не го гледат просторот“, како што јас за тоа по некој пат се изразувам. Не треба да се мисли дека јас тоа го зборувам со некоја осуда на други и со фалење дека јас лично добро го гледам просторот. Не, јас знам арно и за себе лично, дека добро да се „гледа просторот“ е многу тешка работа, а уште потешко е да се комбинуваат просторните елементи. Меѓутоа да се „гледа просторот“ и да се комбинува во него тоа е многу важен фактор и во практична и во научна смисла. Тоа е важно и за инженерот и за биологот и за медицинарот, и за чистиот теоретичар па дури и за филозофот. След поврзувањето на практичните и теориските шеми на било која област со геометриските шеми работите можат да станат многу појасни и попроси. Познати се случаеви кога математичарите - аналитичари само во своите печатени изложувања давале чисто аналитичка форма, додека во битност доваѓале до изнесените резултати преку чисто геометриски шеми и резонувања. Геометријата силно навлезе во Теоријата на броевите, таа створи со помошта на Теоријата на групите нарочна грана во Теоријата на равенките, таа ја кристализира Теоријата на инваријантите, итн., итн. Во современата математика улогата на Геометријата и на просторните претстави е огромна и затоа култивирањето на првите просторни претстави е многу важно уште во началото на школувањето, а потоа тоа треба сè повеќе да се продлабочува и разработува.

За развивање на просторните претстави треба многу и напорно да се работи и тоа во наполно конкретна и јасна форма. Како помошно средство може да служи моделот, но моделот треба да се исползува така да учениците навистина на него гледат просторните елементи и нивните комбинации. Ретко кога видов моделот да се исползува наполно, да сликата во рамнина ја претставува навистина онаа слика што ученикот ја гледа од моделот.

Геометријата и просторните претстави одамна беа главно и најсилно средство во училиштето за борбата со формализмот, со „бубањето“, со неразбирањето на работите. Првиот услов за вистинско, органско усвојување на геометрскиот материјал тоа е јасна претстава. Ако тие јасни просторни претстави ги нема, ако учениците не ја гледаат конкретната врска помеѓу геометриските елементи, материјалот не е совладан.

Освен модели, како средство за развивање на конкретни просторни претстави, може да служи и примената на Геометријата на теренот и општо во стварноста. Сега овде немам можност да навлегувам во методската анализа на ова средство. Мојам само да забележам дека, за сожаление, тоа насекаде оди многу тешко, а кај нас нарочно тешко, бидејќи преди сè немаме наставнички кадар што би можел да ги раководи учениците во таа работа. Прво треба да се спреми подесен кадар од наставници, да речеме, преку нарочни курсеви, а потоа да се воведат соодветни вежби како задолжителни.

4. Култивирање на редот. Математиката и редот тоа се неразделни работи. Ред треба да има во класот, бидејќи тоа значи дека вниманието е тука. Сум видел и сум познавал многу различни наставници во класот. Еден влегува в клас со каталог, целиот клас станува, наставникот го гледа секој ученик и дури наставникот не излезе од класот, редот е непрекорен; тој не вика, не прави никакви забелешки — тој е само *наставник по математика*, кој непрекинато гледа во очите на целиот клас и кога тој зборува, очите на сите гледаат во него, кога тој кажува: „Напишете!“, сите прават она што се бара. Прв услов за тоа е прибраност на наставникот, неговата сталоженост, а и неговата сигурност во она што работи.

Еве го и вториот краен тип — и тој би сакал да постигне резултати, а ги сака и учениците и математиката. Тој не влегува в клас, туку се стрчнува, и наведнаш направи некоја мала шега, потоа не гледа дека некои од учениците се занимаваат со сосем нешто друго, и после настанува она со рака: „Ти!“ и „Ти!“ — „Не знаеш!“ и „Не знаете!“. И потоа почнува да се објаснува со едниот, се кара со него и настанува она што кратко се вика — според школската терминологија — циркус. Наставникот има потполна квалификација, добро завршил универзитет, долгогодишен е наставник, но кај него има многу години циркус. Резултати никакви. Способните ученици го совладуваат материјалот самостојно без оглед на тоа што наставникот им само смета, а слабите ученици се принудени да си земаат часови за да положат матура. Извинете што јас тоа го толкувам толку реалистично. Толку се барат причини за неуспехот на математичката настава; постои и оваа причина: некои наставници по математика не одговараат. Треба да се признае дека да бидеш вистински, добар наставник по математика е многу тешко и совршени наставници по математика има многу малку. А голем дел од успехот зависи од наставникот. За тоа не би требало ни да се зборува кога тоа би зависело само од природата на одделните наставници. Без оглед на

својата лична природа наставникот, обрнувајќи внимание на начинот на своето изложување и анализирајќи го, може да го култивира кај себе она што е нужно за еден добар наставник. Потребно е, преди се, да култивираме во себе си ред, да влегуваме в клас со готов план на методската единица без секаква уकोченост, цврсто да одиме кон целта со јасни изрази, со точни формулации, што ги изработува самиот клас како резултат на онаа напрегната состојба на неговата мисла што наставникот неприметно, но сигурно ја води.

Да продолжиме за математичкиот ред. Математичка тетратка треба да биде во потполен ред, во математички ред. Тетратка - партал тоа е најголем непријател на математиката. Добар математичар може да совлада математика и со партал-тетратка, но и тој би дошол до поарни резултати кога би пишувал на уредна тетратка. Кога еднаш тој ред влезе во крвта, тој ќе остане за целиот живот и толку енергија пести човек и тоа само поради заведениот ред. Наставникот по математика треба да обрне големо внимание на ученичката тетратка. Кај основецот треба сите цифри убаво да се испишани, да стоат в ред, како војници; задржувајќи го тој ред гимназијалците треба да внимаваат на ред на секоја страна, да се гледа системот на операциите, да се гледа редот на доказот. Сите цртежи треба да бидат уредни, дури и оние кои се нацртани со слободна рака. Формата на испитните задачи треба да биде стандардна. Културната вредност на еден интелектуалец многу зависи од тоа во која форма тој ја поднесува својата работа. Надворешната уредност многу поможува на тоа да и во главата сè биде во ред, во секој случај таа уредност не смета. Ги споменувам и тие труизми, бидејќи ја знам репликата — „Не е важно!“.

Геометриското цртање претставува без сомнение силно воспитно средство. Тоа внесува конкретност, стои во врска со примената. За сожаление, поголем дел од наставниците „не сака“ геометриско цртање и тоа од проста причина што самите не умеат да цртаат. Има генерации од наставници што воопште во својот живот немале работа со туш. Цртање во средна школа е нарочно важно не за оние што ќе го изучат овој занат убаво во техничките школи, туку токму за оние што одат во други струки, а каде што истотака по некој пат може да се појави нужда убаво да се нацрта по некој цртеж, графикон или нешто слично.

Јас ќе го завршам ова моје предавање со анализа на уште едно за наставниците многу важно прашање, на прашањето за методиката на наставата. Сметам дека прашањето за методиката на математичката настава е едно од најважните за праксата на наставата. Преди сè двата

соединети делови на наставата — содржината на предметот и методиката на предметот сè пак треба да се разликуваат. Јасно е во што е содржината. Да ги подвлечеме прашањата на методиката: Што од определениот материјал треба да се земе за наставата? Со каква цел? Каква форма и каква последователност треба да се даде на тој материјал во изложувањето? Што треба да се бара од учениците и до кои резултати треба да се дојде?

Секој недостаток во методиката причинува во толку поголема штета, во колку е поголем бројот на учениците. Поради тоа методиката на математиката во основното училиште (сметање и елементи од геометријата) веќе одамна беше предмет на естрано обработување. Големиот број од учениците и во средните школи ја истакнува сега големата важност на методиката дури и од чисто практична гледна точка. Колку работни часови се губат во врска со методските грешки. Таа иста причина го проширува своето влијание во последно време и на високите школи, и во тие школи бројот на учениците осетно порасна.

Да се занимаваш со методика тоа значи преди сè да мислиш за тоа да ли беше арно искористен часот? Зошто учениците не го разбраа ова или она? Зошто не даваат арни писмени одговори? итн., итн. Секој час ново, наредно методско прашање.

Треба секогаш да ги усовршуваме формите на нашето изложување, да ги прилагодуваме на дадениот клас, на дадените услови. Треба да имаме предвид дека ние во денешно време немаме нормално функционирање на школата. Лесно е да се влезе в клас кои знае сè и да го направиме следниот чекор. Сега е скоро насекаде, речи си, патолошка состојба, а во врска со неја треба да ја имаме предвид и патолошката физиологија. Учениците не го знаат претходниот материјал, не се дисциплинирани итн. итн. — сето тоа однапред створува услови за патолошка настава, која е каде и каде покомпликована од нормална настава. Таква состојба бара да употребиме нарочни методски постапки. Обавезно повторување бара свои методски форми за да не им биде досадно на добрите ученици кои тоа веќе го знаат. Тука искрснуваат многу нови прашања што не може да ги предвиди дури ни најарна и најопширна Методика на предметот, бидејќи многу малку Методики ги посветуваат своите страници на проучувањето мерките за борбата со случаевите на патолошка состојба. Да знаеш, да ја изучуваш методиката на предметот, да ги анализираш начините како може да се изведе една или друга методска единица, па и цела партија — тоа е многу важно и корисно, но освен тоа треба да бидеш и самиот на секој чекор методичар, т. е. да

мислиш за најарниот начин на изложувањето при дадените услови:

Знам дека сето тоа не е така лесно, дека положбата на наставникот, кој е оптеретен со голем, огромен број часови, е многу тешка. Но таа работа, работата на математичката настава треба да се врши непрестајно и да се усовршува и вие треба да ги внесете во таа работа вашите млади сили и вашиот ентузијазам за да се изврши таа во што поарна форма. Математиката е база на материјалната култура, а математичката настава има голема воспитна сила и за оние што немаат непосредна врска со материјалната култура. Секој наставник по математика, без оглед на тоа како ја проценува неговата делатност средината во која тој живее и работи, треба со гордост да сознава дека на него, како на основа, лежи важен дел од социјалниот напредок на неговиот народ, нарочно важен во денешното време на натпреварувањето на сите народи од Земјината топка.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Euler. — Anleitung zur Algebra. Petersbourg. 1770, 2 Bde.
2. A. M. Legendre. — Éléments de Géométrie avec additions et modifications par M. A. Blanchet. Ouvrage adopté par l'Université. Trente-huitième édition. (На мојот примерок не е посочена годината на издањето). Првото издање на оваа книга излезе во 1794 година.
3. H. Weber und J. Wellstein. — Enzyklopädie der Elementar-mathematik. B. I; Arithmetik, Algebra und Analysis. B. II: Elemente der Geometrie. B. III, 1 Teil: Mathematische Physik 2 Teil: Darstellende Geometrie, graphische Statik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, politische Arithmetik und Astronomie.
- J. Tropicke. — Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. B. I. Rechnen. B. II. Allgemeine Arithmetik. B. III. Proportionen. Gleichungen. B. IV. Ebene Geometrie. B. V. Ebene Trigonometrie. Sphärik und sphärische Trigonometrie. B. VI. Analysis. Analytische Geometrie. B. VII. Stereometrie.