Математички Билтен
Книга 5—6 (XXXI — XXXII), 1981 — 1982, (47—55)
Скопје — Југославија

КВАТЕРНИОНСКИ РЕДОВИ И ФУНКЦИИ

О. Јошов

Класичната теорија на функции е прекрасна математичка дисциплина во која со посебна убавина се истакнува теоријата на холоморфни функции. Оваа статија претставува настојување еден дел од класичната теорија да се пренесе на функции од кватерниони, и тоа во најпростиот случај, кога дискусијата може да се води директно, т. е. без преминување на линеарни репрезентации. Се покажува дека голем дел од класичната теорија се пренесува, а се добиваат и резултати карактеристични за кватернионите.

Во текот на изладањето ќе се применуваат ознаките R и C за полињата од реални и комплексни броеви, R^+ за множеството од позитивни броеви, N за множеството од природни броеви и $\mathcal{H}$ за алгебрата на кватерниони. При идентификација на $\mathcal{H}$ како векторски простор со $R \times R^3$, секое $q \in \mathcal{H}$ се разложува во вид $\lambda + x$ или $(\lambda, x) \in R \times R^3$, а при индентификација на $\mathcal{H}$ како десен векторски простор со $C \times C$ за $q \in \mathcal{H}$ имаме разложување $u + e_2 w$ или $(u, w) \in C \times C$. При тоа $\{e_0, e_1 e_2, e_3\}$ е стандардната база на $\mathcal{H}$, при што е вообично e_0 да се идентифицира со реалната, а e_1 со имагинерната единица ([2], стр 17 — 18). Нормата на $q \in \mathcal{H}$ се означува со $||q||$, соодветниот конјугиран кватернион со $\bar{q}$ и обратниот со q^{-1}.

1. Редови

Основниот дел од теоријата на низи и редови од комплексни броеви скоро без измени се пренесува на редови од кватерниони. Нека е

$$q_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1. 1}$$

кватернионска низа со разложување $q_n = \underset{1}{z_n} + e_2 \underset{2}{z_n}$, $n \in N$. Дефиницијата за конвергентност на низата може да се реконструира од соод ветните дефиниции во R^4 и во C^2. Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$ е кватернионот $(\lim z_{\underset{1}{n}}, \lim z_{\underset{2}{n}})$, ако граничните вредности $\lim z_{\underset{1}{n}}$ и $\lim z_{\underset{2}{n}}$ постојат. Критериумот на Коши прима вид

Низа од кватерниони q_n конвергира ако и само ако за секое $\varepsilon \in R^+$ постои број $n(\varepsilon) \in N$ со својство дека неравенството $||q_\nu - q_\mu|| < \varepsilon$ важи при $\nu, \mu > n$ (ε).

Кватернионски ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \quad (q_n \in \mathscr{H},\ n \in N) \tag{1.2}$$

се дефинира како конвергентен ако конвергира низата од неговите парцијални суми $s_n = \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha$, $n \in N$, при што граничната вредност $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ се дефинира како негова сума.

Како последица на оваа дефиниција имаме

Королар 1. 1. *Нека се $q_n = (u_n, w_n)$ и $q_n = \sum_{\nu=0}^{3} x_{\underset{n}{\nu}} e_\nu$ $(n \in N)$ разложувањата на членовите на редот (1.2) при интерпретација на $\mathscr{H}$ како $C \times C$ и $R \times R^3$. Имаме*

(*a*) *Редот (1.2) конвергира ако и само ако конвегираат и двата реда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n. \tag{1.3}$$

Ако s, $\underset{u}{s}$ и $\underset{w}{s}$ се соодветните суми на редовите (1.2) и (1.3), имаме $s = (\underset{u}{s}, \underset{w}{s})$

(*b*) *Редот (1·2) конвергира ако и само ако конвергираат редовите*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\underset{n}{\nu}}, \quad \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{1.4}$$

Ако s_ν се соодветните суми на редовите (1.4), имаме $s = \sum_{\nu=0}^{3} s_\nu e_\nu$

Критериумот на Коши прима вид

Кватернионски ред $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ конвергира ако и само ако за секое $\varepsilon \in R^+$ постои број $n(\varepsilon) \in N$ со својство дека за секое $m \in N$ важи $\left\|\sum_{\alpha=1}^{m} q_{n(\varepsilon)+\alpha}\right\| < \varepsilon$.

И поимот за апсолутна конвергентност природно се пренесува на редови од кватерниони.

Конвергентен кватернионски ред (1.2) е апсолутно конвергентен ако неговата конвергентност е инваријанта за произволно разместување на неговите членови.

Директно од оваа дефиниција имаме

Королар 1.2. (*a*) *Редоӣ* (1.2) *конверīира аӣсолуӣно ако и само ако двата реда* (1.3) *се аӣсолуӣно конверīенӣни.*

(*b*) *Редоӣ* (1.2) *конверīира аӣсолуӣно ако и само ако чеӣириӣе реда* (1.4) *се аӣуолуӣно конверīенӣни.*

Веднаш се добива и

Королар 1.3. *Редоӣ* (1.2) *е аӣсолуӣно конверīенӣен ако и само ако конверīира редоӣ од нормиӣе на неīовиӣе членови.*

Теоремата за двојни редови директно се пренесува на редови од кватерниони, но веќе теоремата за производ на апсолутно конвергентни редови од комплексни броеви не може да се уопшти на кватернионски редови со целта своја универзалност, зашто кватернионското множење не е комутативна операција.

2. Функција и непрекинатост

Дефиницијата на кватернионска функција од кватернионски аргумент се сведува на релација во декартовиот производ $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ Воведувањето на кватернионска риманова сфера овозможува проширување на дефиницијата на релации од $\overline{\mathcal{H}}\times\overline{\mathcal{H}}$ при што се вклучуваат и функции чија вредност е бескрајно далечната точка. (Со $\overline{\mathcal{H}}$ е означена алгебрата $\mathcal{H}$ проширена со воведување на елемент — бескрајно далечна точка). При воведувањето на поим за непрекинатост природно се јавува класа еквивалентни дефиниции кои се во склад со соодветните поими за реални и комплексни функции. На пр.

Кваӣернионска функција $f\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ *е неӣрекинаӣа во* $q_0\in D(f)$ ($D(f)$ *дефинициона област на* f) *ако е конечна во* q_0 *и ако за секоја низа од кваӣерниони* $q_n\in D(f)\,(n\in N)$ *со* $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=q_0$ *важи* $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_n)=f(q_0)$.

Стандардните правила за непрекинатост на збир и производ од конечно многу непрекинати реални или комплексни функции директно се пренесуваат, но поимот количник не може да се пренесе со вообичаената смисла и универзалност. Наместо f/φ (f, φ кватернионски функции) се разгледува $f\varphi^{-1}$ или $\varphi^{-1}f$ и непрекинатоста се сведува на постоење обратна функција и испитување на производ. Нека е

$$h=f(q) \tag{2.1}$$

кватернионска функција при што имаме разложување

$$q=(z_1, z_2)=\sum\nolimits_{\alpha=0}^{3} x_\alpha e_\alpha, \tag{2.2$'$}$$

$$h=(w_1, w_2)=\sum\nolimits_{\alpha=0}^{3} y_\alpha e_\alpha. \tag{2.2$''$}$$

Функцијата f определува две комплексни функции

$$w_k = w_k(z_1, z_2) \quad k = 1, 2 \tag{2. 3'}$$

од две комплексни променливи и четири реални функции

$$y_\nu = y_\nu(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{2. 3''}$$

од четири реални променливи. При тоа, непрекинатоста на f е еквивалентна на непрекинатоста на сите функции (2. 3'), (2. 3'').

Кватернионскиот полином од степен n

$$q \to \sum_{m=0}^{n-1} a_m q^{n-m} b_m + c_n \qquad a_m, b_m, c_n \in \mathcal{H}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1$$

е основен пример за кватернионска функција непрекината на целата алгебра $\mathcal{H}$.

3. Редови од функции

Нека е $f_n(q)$, $n \in N$, низа од кватернионски функции со заедничка дефинициона област D и нека е редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(q) \tag{3. 1}$$

конвергентен за секое $q \in D$, со збир $f(q)$. Јасно е дека збирот $f(q)$ е кватернионска функција. Ако $s_n(q)$, $n \in N$ е низата од парцијални суми на редот (3. 1) и $r_n(q) = f(q) - s_n(q)$, имаме вообичаена дефиниција на рамномерна конвергенција:

Редот (3.1) *е равномерно конвергентен ако за секое* $\varepsilon > 0$ *постои број* $n(\varepsilon) \in N$ *со својство дека за секој индекс* $n > n(\varepsilon)$ *и за секое* $q \in D$ *важи* $||r_n(q)|| < \varepsilon$.

При непрекинатост на функциите f_n важи стандардното правило:

Збирот на равномерно конвергентен ред од непрекинати фупкции е непрекината функција на заедничката дефинициона област.

Важи и критериумот

Ред од кватернионски функции $\Sigma f_n(q)$ *со заедничка дефинициона област е апсолутно и равномерно конвергентен ако за редот* $\Sigma\, ||f_n(q)||$ *постои конвергентен мајорантен ред од позитивни броеви.*

Кватернионски ред степени во околина на $q_0 \in \mathcal{H}$ е ред од вид

$$c_0 + a_1(q - q_0) b_1 + a_2(q - q_0)^2 b_2 + \ldots \tag{3.2}$$

$$a_n, b_n, c_0 \in \mathcal{H}, \quad n \in N.$$

Не е тешко дасе види дека за редот (3.2) важи варијанта на абеловата теорема:

Теорема 3.1. *Ако ред степени* (3.2) *конвергира при* $q = h_0$, *тој конвергира апсолутно и равномерно во секоја топка* $\overline{B}_{q_0}(r) = \{q;\ \|q - q_0\| \leqslant r\}$, $r < \|h_0 - q_0\|$.

Имаме

Королар 3.2. *За секој кватернионски ред степени* (3.2) *постои број* $r \in R^+ \cup \{0\}$ *со својство дека редот конвергира во секоја внатрешна точка на топката* $\overline{B}_{q_0}(r)$, *а дивергира во секоја нејзина надворешна точка.*

Топката од королaрот се дефинира како топка на конвергенција на соодветниот ред, а нејзиниот радиус — како радиус на конвергенција.

Не е тешко да се добие и модификација на коши-адмаровата формула за радиус на конвергенција. Имаме

Теорема 3.3 *За радиусот на конвергенција* r *на ред* (3.2) *важи*

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n \to \infty} (\|a_n b_n\|^{1/n}). \tag{3.3}$$

Ако се премине на матрично претставување на c_0, a_n, b_n и $q - q_0$ ($n = 1, 2, \ldots$) наместо редот (3.2) ќе фигурира соодветен матричен ред. Ограничувајќи се на случај $q_0 = 0$, $b_n = 1$, $c_0 \in R$, $a_n \in R$ ($n \in N$) природно се наложува дефинирање на голем број од класичните елементарни функции. Имаме на пр.

$$(1 - q)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n,\ \|q\| < 1, \qquad e^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!},$$

$$\cos q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} q^{2n}, \qquad \sin q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} q^{2n+1}$$

и слично... Преминувањето на соодветни матрични редови веднаш ги озаконува овие дефиниции.

Ако при $q \neq q_0$ формираме ред

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_{-n} (q - q_0)^{-n} b_{-n}, \quad a_{-n}, b_{-n} \in \mathscr{H}, \ n \in N, \tag{3.4}$$

редот (3.4) конвергира при $q \in B_{1/r}(q_0)$, каде што r е радиус на конвергенција на редот $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_{-n} (h - q_0)^n b_{-n}$.

Кватернионски лоранов ред во околина на $q_0 \in \mathscr{H}$ е ред од вид

$$\Sigma_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (q - q_0)^n b_n \quad a_n, b_n \in \mathscr{H}, \ n \in \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}. \tag{3.5}$$

Јасно е дека редот (3.5) конвергира во *кватернионски прстен на конвергенција* — отворена област меѓу топките на конвергенција на редовите $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (q - q_0)^n b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(q - q_0)^{-n} b_{-n}$ (ако таа област постои).

Ако се ограничиме на редови со реални коефициенти во околина на нулата (или на реална точка), се добиваат резултати кои се копија на теоријата на холоморфни функции. На пр.

Нека е $\varphi_\alpha(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \underset{\alpha}{a_n} q^n$, $\underset{\alpha}{a_n} \in R$, $\alpha = 1, 2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *ред со радиус на конвергенција* $r_\alpha \neq 0$. *Ако постои бескрајно множество* $X \subset \mathcal{H}$ *за кое кватернионската нула е точка на натрупување при што за секое* $h \in X$ *важи* $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$, *имаме* $\underset{1}{a_n} = \underset{2}{a_n}$ *за секое* $n \in N \cup \{0\}$.

За секој ред степени $\psi(q)$ *со реални коефициенти, позитивен радиус на конвергенција, и кој не се анулира во кватернионската нула, постои ред степени* $\omega(q)$ *со реални коефициенти и број* $r \in R^+$ *за кои важи* $\psi(q)\,\omega(q) = 1$ *при* $q \in \overline{B}_r(0)$.

Оваа теорема оправдува воведување на ознака $1/\psi(q)$ ($\psi(q)$ ред степени со реални коефициенти во околина на нулата) и воопшто, природно дефинирање на рационална функција од $\psi(q)$.

Теоремата за извод на ред степени на холоморфна функција не може да се пренесе со својата вистинска смисла. Се јавуваат силни ограничувања и се добива многу послаба теорема:

Ако е $\varphi_\lambda(q) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (q - \lambda)^n$, $a_n, \lambda \in R$, *кватернионски ред степени и* μ *реална точка од нејзината топка на конвергенција, имаме*

$$\varphi_\mu(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_\lambda^{(n)}(\mu)}{n!}(q - \mu)^n$$

при

$$\varphi_\lambda^{(n)}(q) \overset{def}{=} \sum_{u=n}^{\infty} \frac{u!\, a_n}{(u-n)!}(q - \lambda)^{u-n}.$$

4. Диференцијален количник

Нека е $f(q), q \in D(f) \subset \mathcal{H}$, непрекината функција од $q = z_1 + e_2 z_2$ со разложување

$$f(q) = w_1 + e_2 w_2 \tag{4.1}$$

при што ќе претпоставиме дека w_1 и w_2 се холоморфни функции од z_1, z_2, при менување на z_1 и z_2 во соодветни области. На областа $D(f)$ ѝ одговара соодветна област во $C \times C$ при идентификацијата $\mathcal{H} = C \times C$, за која ќе ја задржиме ознаката $D(f)$.

Ако се означи

$$(\Delta f)(q; h) = f(q + h) - f(q); \quad h \in \mathcal{H}, \; q, q + h \in D(f),$$

може да се разгледува лев и десен кватернионски диференцијален количник $'f(q)$ и $f'(q)$,

$$'f(q) = \lim_{h \to 0} ((\Delta f)(q; h) h^{-1}), \tag{4.2}$$

$$f'(q) = \lim_{h \to 0} (h^{-1} (\Delta f)(q; h)). \tag{4.2'}$$

Кватернионско-значна функција

$$t \in [a, b] \subset R \to q(t) \in \mathscr{H}$$

може да се разложи како две комплексно-значни функции

$$w_l = w_l(\mathrm{t}), \quad a \leqslant t \leqslant b \quad l = 1, 2$$

или на четири реални функции

$$x_\nu = x_\nu(t), \quad a \leqslant t \leqslant b \quad \nu = 0, 1, 2, 3.$$

При наложување на стандардни услови таква функција се идентифицира со крива C во $\mathscr{H}$, која е непрекината или задоволува различни степени на глаткост. Воведувањето на диференцијален количник (4.2) и (4.2′) би имало смисла на соодветен лев или десен извод ако постојат „разумни“ услови при кои вредноста на лимесите (4.2), (4.2′) е инваријанта за стремење на h кон нула по произволна крива.

Ќе го испитаме лимесот (4.2) при $h = (h_1, 0)$ и при $h = (0, h_2)$, $h_1, h_2 \in C$. Со оглед на разложувањето (4.1) при $h = (h_1, 0)$ се добива

$$(\Delta f)(q; h) h^{-1} = \{w_1(z_1 + h_1, z_2) - w_1(z_1, z_2)\} \ h_1^{-1} +$$
$$e_2 \{w_2(z_1 + h_1, z_2) - w_2(z_1, z_2)\} h_1^{-1}$$

и следователно

$$\lim_{h = (h_1, 0) \to 0} ((\Delta f)(q; h) h^{-1}) = \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + e_2 \frac{\partial w_2}{\partial z_2}. \tag{4. 3}$$

На сличен начин се добива и

$$\lim ((\Delta f)(q; h) h^{-1}) = \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{z}_2} - e_2 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{z}_2}. \tag{4. 3'}$$

Ако поставиме барање за идентичност на лимесите (4.3) и (4.3′), се добиваат релациите

$$\frac{\partial w_1}{\partial z_1} = \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{z}_2}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial z_1} = -\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{z}_2} \tag{4.4}$$

кои би можело да се наречат леви кватернионски Коши-Риманови услови. При разложување

$$w_k = u_k + iv_k, \quad z_k = x_k + iy_k \quad k = 1, 2$$

добиваме реални форми на условите (4.4), коишто, со оглед на стандардните коши-риманови услови за функциите w_1 и w_2 се сведуваат на

$$\frac{\partial w_k}{\partial \bar{z}_l} = 0 \quad k, l = 1, 2, \tag{4.5$_1$}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial y_2}, \tag{4.5$_2$}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y_1} = \frac{\partial u_1}{\partial y_2}. \tag{4.5$_3$}$$

Пропозиција 4.1. *Нека е f кватернионско-значна функција од кватернионски аргумент која се разложува на холоморфни функции w_1 и w_2, и нека е $h \in \mathcal{H}$. Граничната вредност*

$$'f(\lambda) = \lim_{h \to 0} \{f(q + h) - f(q)\}\, h^{-1} \tag{4.6}$$

не зависи од линијата по која h се стреми кон кватернионската нула ако и само ако функциите w_1, w_2 ги задоволуваат условите (4.4). *При тоа вредноста на лимесот* (4.6) *е зададена со*

$$'f(q) = \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + e_2 \frac{\partial w_2}{\partial z_1}.$$

Доказ. Неопходноста е јасна од претходното излагање, а проверка на доволноста се сведува на испитување на изразот $(\Delta f)(q; h)$. Со примена на лагранжовата формула за функции од повеќе променливи се покажува дека условите (4.4) се и доволни за независноста н лимесот (4.6).

Забелешка. На сличен начин може да се побараат услови соодветни на (4.4) и за десниот лимес (4.2)′ но изразите што при тоа се добиваат не осигуруваат негова инваријантност.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Гурвиц, Р. Курант
Теория функций, „НАУКА", Москва 1968.
[2] Claude Chevalley,
Theory of Lie Groups I, Princeton Univ. Press 1946.
[3] Ronald Brown
Elements of Modern Topology, McGrow—Hill London 1968.

QUATERNIONIC SERIES AND FUNCTIONS

O. Jotov

Summary

When discussing the theory of quaternionic functions the notions of a sequence, limit walue and series, as well as the notion of continuity, naturally appear as basic. A great deal of the theory of complex sequences and series can be directly transmitted or naturally modified to quaternionic ones, as for example the Cauchy convergence criterion, but new hindering circumstances appear (the non-commutativity of the skew field of quaternions $\mathcal{H}$) and do not allow us to transmit the whole classical theory. The importance of this fact increases when we discuss functions. The discussion is restricted to the most elementary cases, when it can be led directly, without considering linear representations. A general quaternionic power series (cf. (3 .2)) $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (q-q_0)^n b_n$, $c, a_n, b_n \in \mathcal{H}$ is introduced and the existence of a 4-dimensional ball $\overline{B_r}(q_0)$ of convergence is proved. We have a modification of the theorem of Abel and of the Cauchy—Hadamard formula applied to the power series (3 2) (cf. (3.3)). The notion of power series is extended to quaternionic Laurent series $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (q-q_0)^n b_n$ (cf. (3.5)) with a 4-dimensional ring of convergence — the space between two concentric 4-dimensional balls.

A quaternionic-walued function $f(q)$ $(q \in \mathcal{H})$ is decomposed into two complex-walued functions w_1, w_2 of two complex variables z_1, z_2 and an attempt is made to introduce a differential quotient. Two kinds of limits appear,

$$'f(q) = \lim_{h\to 0} (f(q+h) - f(q))\, h^{-1},$$

$$f'(q) = \lim_{h\to 0} (h^{-1}(f(q+h) - f(q))),$$

$$q, h \in \mathcal{H}$$

the left $'f$ and the right one f. Discussing the conditions of independence of the curve allong which $h \to 0$ for the limits $'f$ and f' it is proved that the left one is independent if and only if the conditions (4.4) (or equivalently their real forms (4.5_1), (4.5_2) (4.5_3)), are satisfied cf. Proposition 4.1).