ЗА НЕКОИ ПРОЕКТИВНИ РАМНИНИ

Б. Трпеновски

1. Во оваа работа се разгледуват конфигурационите теореми означени со A_n, B_n, α_n и β_n, од кои последните три преставуваат во извесен смисол обопштувања на познатите конфигурациони теореми: Фановата (7_3), малата теорема на Дезаргес (D_{10}) и теоремата D_9 (еден специјален облик на теоремата на Дезаргес).

Се покажува дека во рамнината $\pi(A_n)$ може да се реализира теоремата B_n, а теоремите A_1 и $B_1 \equiv 7_3$ се еквивалентни.

Ако е $m = k(n+1) - 1$, во рамнината $\pi(A_n)$ ($\pi(B_n)$) може да се реализира, притоа дегенерирано, теоремата A_m (B_m); ако $n+1$ и $m+1$ не се релативно прости, рамнината во која се едновремено реализирани теоремите A_n и A_m (B_n и B_m) е од облик $\pi(A_d)$ ($\pi(B_d)$) каде $d+1$ е најголемиот заеднички делител на $n+1$ и $m+1$, а ако $n+1$ и $m+1$ се релативно прости, не постои рамнина во која можат едновремено да се реализираат теоремите A_n и A_m (B_n и B_m).

Во рамнината $\pi(\alpha_n)$ во која е реализирана една од двете теореми β_n и β_{n+m}, реализирана е и другата од нив; ако во една рамнина се реализирани било кои две од трите теореми α_n, α_m и α_{n+m}, во таа рамнина е реализирана и третата од нив. Од теоремата α_n следува теоремата β_n.

Врските помеѓу теоремите A_n и B_n од една страна, и α_n и β_n од друга страна, дадени се со: $B_n \to \alpha_{k(n+1)}$, $B_n \to \beta_{k(n+1)-1}$ и $B_n \to \beta_{k(n+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, додека од теоремата A_n следуваат уште и првата мала теорема на Пап $\Pi(9; 9, 10)$ и $aA(10; 11, 13)$ (асоцијативност на собирањето). Од теоремата B_2 следува теоремата D_8.

Секоја од теоремите α_n и β_n може да се реализира во алтернативните рамнини, а рамнината во која се реализирани теоремите α_n и α_m, кога n и m се релативно прости, е алтернативна.

Теоремите A_n и B_n не можат да се реализираат во обичната проективна рамнина. Ако $n+1$ е прост, овие теореми можат да се реализираат во рамнините конструирани над поле со карактеристика $n+1$, додека прашањето дали постојат рамнини во кои можат да се реализираат недегенерирано теоремите A_n и B_n, кога $n+1$ не е прост, останува отворено, и во случај на потврден одговор на ова прашање би добиле дека од A_m не следува B_n кога $m > n$.

Секоја конечна рамнина $\pi(A_n)$ е Папова, а секоја рамнина $\pi(B_{2k})$ во која е реализирана теоремата D_9 е алтернативна.

2. Под *проективна рамнина* π ќе го подразбираме множеството од точки π и една негова фамилија подмножества, што ќе ги наречеме прави, кои ги задоволуваат следните аксиоми:

I. *Ако P и Q се две различни точки, постои една и само една права p, таква да $P \in p$ и $Q \in p$.*

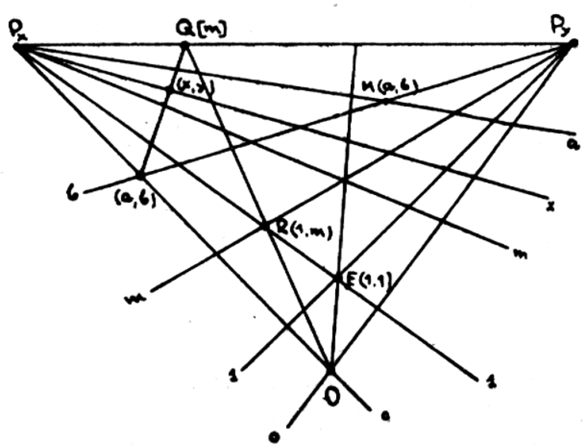
II. *Ако p и q се две различни прави, постои една и само една точка P, таква да $P \in p$ и $P \in q$.*

III. *Постојат четири различни точки од кои ниедна тројка не припаѓа на една права.*

Во вака определената рамнина π ќе воведеме координати на следниот начин:

Нека P_x, P_y, O и E се четири различни точки од кои никои три не припаѓаат на една права (спрема аксиомата III такви сигурно постојат). Со $T=\{o, 1, a, b, \ldots\}$ ќе го означиме множеството од сите прави што врват низ P_x, притоа, со o ќе ја означиме правата $P_x \frown O$ (т. е. правата што врви низ точките P_x и O), а со 1 правата $P_x \frown E$. На секоја права што врви низ P_y ќе и ја поставиме во соответствие онаа права што врви низ P_x, која со неа се сече на правата $O \frown E$. Ако нема опасност од недоразбирање, соответните прави ќе ги означиме еднакво. Така, правата $P_y \frown O$ ќе ја означиме со o, а $P_y \frown E$ со 1. На тој начин сме ги означиле сите прави што врват низ P_x и P_y, освен $P_x \frown P_y$, која се вика специјална права.

На секоја точка M што не припаѓа на правата $P_x \frown P_y$ ќе и поставиме во соответствие по еден подреден пар елементи (a, b) од T (ќе ги викаме координати на M), каде a ја означува правата $P_x \frown M$, а b правата $P_y \frown M$. Ваквото соотвествие помеѓу точките што не припаѓаат на $P_x \frown P_y$ и паровите елементи од T е обратно еднозначно. На точките Q што припаѓаат на правата $P_x \frown P_y$, освен P_x, ќе им поставиме во соответствие по



Сл. 1

еден елемент m од T и ќе го викаме координата на Q, каде е m втората координата од пресечената точка на правите $P_x \cap E$ и $O \cap Q$. На тој начин за точката P_y координата ќе биде o. Точката P_x, која останува без координата се вика специјална.

Нека определиме сега една *тернарна операција* во множеството T, т. е. на секоја подредена тројка елементи $x, m, b \in T$ и поставиме во соответствие еден елемент $y = x . m_o b$ од T. При зададени x, m и b, y се определува еднозначно како втора координата на пресечната точка од правата x што врви низ P_x и правата $[m] \cap (o, b)$.

Со задавањето на точките P_x, P_y, O и E, секогаш е определена *тернарна операција* со следните особини:

(a) $o . m_o b = a . o_o b = 1 . b_o o = b . 1_o o = b$

(b) *равенката* $a . m_o z = b$ *има еднозначно решение по* z *за секои* $a, m, b \in T$.

(c) *равенката* $x . m_{1o} b_1 = x . m_{2o} b_2$ *има еднозначно решение по* x *за секои* $m_1 \neq m_2$, $b_1, b_2 \in T$.

(d) *системот* $a_1 . y_o z = b_1$, $a_2 . y_o z = b_2$ *има еднозначно решении по* y *и* z *за секои* $a_1 \neq a_2$, $b_1, b_2 \in T$.

Множеството T определено во една рамнина π со тернарна операција која ги има горните особини, се вика *тернар* на рамнината π. За една рамнина, очигледно, постојат повеќе тернари. Притоа, лесно се покажува дека во секој тернар се точни и следните особини:

(e) *равенката* $x . m_o b = c$ *има еднозначно решение по* x *за било кои* $m \neq o$, $b, c \in T$,

(f) *равенката* $a . y_o b = c$ *има еднозначно решение по* y *за било кои* $a \neq o$, $b, c \in T$.

Може да се покаже ([1], теорема 8) дека над едно множество T со особините $(a)-(d)$ може да се конструира проективна рамнина, каде T (со дадената тернарна операција) ќе биде еден од нејзините тернари.

Ако во тернарот T се определат две нови бинарни операции, *собирање* „+“ и *множење* „·“, на следниот начин:

$$a + b = a . 1_o b, \quad a . b = a . b_o o,$$

ќе добиеме една нова структура, која обично се вика *природно тело* на рамнина π. Во секое природно тело, на било која рамнина точни се следните особини:

(a_1) $a . 1 = 1 . a = a + o = o + a = a, \quad a . o = o . a = o$.

(b_1) *секоја од равенките* $a + x = b$ и $y + c = d$ *има еднозначно решение по* x, *односно* y, *за било кои* $a, b, c, d \in T$.

(c_1) *секоја од равенките* $ax = b$ и $yc = d$ *има еднозначно решение по* x, *односно* y, *за било кои* $a, b, c, d \in T$.[1])

За пократко изразување, ние ќе ги воведеме уште и следните ознаки:

(p) $a +_n b = a + (a +_{n-1} b)$ и $a\ _n{+} b = (a\ _{n-1}{+} b) + b$,

$$a +_1 b = a\ _1{+} b = a + b$$

(t) $T_n (a, b, c) = a . b_o T_{n-1}(a, b, c)$, $\underset{n}{T}(a, b, c) = a . \underset{n-1}{T}(a, b, c)_o c$

[1]) За ова поопширно може да се види во [1] и [5].

$$_nT(a, b, c) = {}_{n-1}T(a, b, c).\ b_o\, c,$$
$$T_1(a, b, c) = \underset{1}{T}(a, b\, c) = {}_1T(a, b, c) = a.\, b_o\, c,$$

од каде лесно се добива,

(p_1) $a +_n (a +_m b) = a +_{n+m} b,\ (a\ _n + b)\ _m + b = a\ _{n+m} + b.$

(t_1) $T_n(a, b, T_m(a, b\ c,)) = T_{n+m}(a, b, c),\ \underset{n}{T}(a, \underset{m}{T}(a, b, c), c) = \underset{n+m}{T}(a, b, c),$

$$_nT({}_mT(a, b, c),\ b, c) = {}_{n+m}T(a, b, c).$$

(p) $T_n(a, 1, c) = a +_n c,\ _nT(a, 1.\, c) = a\ _n + c.$

3. Нека ни се зададени точките 1, 2, 3, 4 и 5 од една рамнина π, каде првите три точки припаѓаат на една права (ќе означуваме со 123). Тргнувајќи од дадените, ќе образуваме нови точки во π по шемата:

$$1\,2\,3 \quad \left.\begin{matrix}1\,4\\2\,5\end{matrix}\right\}6 \quad \left.\begin{matrix}1\,5\\3\,4\end{matrix}\right\}7 \quad \left.\begin{matrix}3\,5\\2\,7\end{matrix}\right\}8\ \ldots$$
$$\left.\begin{matrix}3\,5\\2\,2(n+2)+1\end{matrix}\right\}2(n+3) \quad \left.\begin{matrix}3\,6\\1\,2(n+3)\end{matrix}\right\}2(n+3)+1$$

каде, на пример, точката 6 е добиена како пресек на правите $1 \cap 4$ и $2 \cap 5$. Системот од точките $1 - 2(n+3)+1$ со определените по шемата припадности ќе го викаме ионфигурација, а зададените пет точки — генератори на конфигурацијата. Тврдењето дека една тројка точки од конфигурацијата (чија припадност со една права не следува од конструкцијата) припаѓа на една права, ќе го викаме конфигурациона теорема. Така на пример, за горната конфигурација ја добиваме следната конфигурациона теорема.

$$A_n:\quad 1\,2\,3 \quad \left.\begin{matrix}1\,4\\2\,5\end{matrix}\right\}6 \quad \left.\begin{matrix}1\,5\\3\,4\end{matrix}\right\}7 \quad \left.\begin{matrix}3\,5\\2\,7\end{matrix}\right\}8\ldots$$
$$\left.\begin{matrix}3\,5\\2\,2(n+2)+1\end{matrix}\right\}2(n+3) \quad \left.\begin{matrix}3\,6\\1\,2(n+3)\end{matrix}\right\}2(n+3)+1 \,\Big|\, 2\quad 4\quad 2(n+3)+1,$$

каде тројката точки $2\ 4\ 2(n+3)+1$ зад вертикалната црта ја означува завршната припадност, која не следува по конструкција.

За една конфигурациона теорема K ќе речеме дека е реализирана во една рамнина π, ако K е точна во π при било каков избор на нејзините генератори, а рамнината тогаш ќе ја означуваме со $\pi(K)$. Така, рамнините во кои е реализирана A_n ќе ги означуваие со $\pi(A_n)$.

За рамнините $\pi(A_n)$ ќе ја докажеме следната теорема:

Теорема 1. *Во секое природно тело на рамнинота* $\pi(A_n)$ *точни се идеидентитетите*

(1) $T_n(a, b, c.\, b_o\ (a.\, b_o\, d)) = c.\, b_o\, d,$

(2) $T_n(a, b, c.\, b_o\, ab) = cb,$

(3) $a +_n (c + (a + d)) = c + d,$

(4) $((c + a) + d)_n + a = c + d$'

(5) $a +_n (c + a) = c,$

(6) $(a + d)_n + a = d,$

и обратно, рамнината, чие што секое природно тело содржи било кој од горните идентитети е од облик $\pi(A_n)$.

Доказ. Ќе ја докажеме точноста на теоремата за идентитетот (1). За генераторни ќе ги избереме точките:

$1 \equiv [b]$, $2 \equiv P_y$, $3 \equiv P_x$, $4\,(c, c.\,b_o\,d)$ и $5\,(o, a.\,b_o\,d)$.

Спрема таблицата за припадност на A_n ќе добиеме:

$6\,(a, a.\,b_o\,d)$, $7\,(c, c.\,b_o(a.\,b_o d))$, $8\,(o, c.\,b_o(a.\,b_o d))$ $9\,(a, a.\ b_o\,(c.\,b_o(a.\,b_o\,d)))$, ...

Индуктивно ќе покажеме дека точката $2(n+3)+1$ ги имаме координатите $x_{2(n+3)+1} = a$ и $y_{2(n+3)+1} = T_n\,(a, b, c.\,b_o\,(a.\,b_o\,d))$.

За $n=1$ тврдењето е точно. Нека претпоставиме дека е точно и за $n=k$. Точката $2(k+4)$, како пресечна за правите $3\frown 5$: $x=o$ и $2\frown 2(k+3)+1$: $y = T_k\,(a, b, c.\,b_o\,(a.\,b_o\,d))$, ги има координатите $x_{2(k+4)} = o$ и $y_{2(k+4)} = T_k\,(a, b, c.\,b_o\,(a.\,b_o\,d))$, додека точката $2(k+4)+1$ како пресечна за правите $3\frown 6$: $x=a$ и $1\frown 2(k+4)$: $y = x.\ b_o\ T_k\ (a,\ b,\ c.\ b_o\,(a.\ b_o\ d))$, ги има координатите $x_{2(k+4)+1} = a$ и $y_{2(k+4)+1} = a.\,b_o\,T_k\,(a, b, c.\,b_o\,(a.\,b_o\,d))$. Бидејќи пак, спрема (t) е $a.\,b_o\,T_k\,(a, b, c.\,b_o\,(a.\,b_o\,d)) = T_{k+1}(a, b, c.\ b_o\ (a.\ b_o\ d))$, тврдењето е доказано.

Доказот на теоремата сега се добива лесно:

Во рамнината $\pi(A_n)$ точките 2, 4 и $2(n+3)+1$ припаѓаат на една права (завршната припадност на A_n), па, равенката на правата $2\frown 4$: $y = c.\,b_o\,d$ мора да ја задоволат координатите на точката $2(n+3)+1$, од каде се добива идентитетот (1).

Обратно, ако во секое природно тело на рамнината π е точен идентитетот (1), по негова сила, равенката на правата $2\frown 4$ ја задоволуваат координатите на точката $2(n+3)+1$ и рамнината е од облик $\pi(A_n)$.

Доказот за идентитетот (4) се добива слично, ако за генераторни се изберат точките: $1 \equiv P_x$, $2 \equiv P_y$, $3 \equiv [1]$. $4\,(c, c+d)$ и $5\,(c+a, c+a)$.

Идентитетот (1) за $d=o$ преминува во (2); за $b=1$ во (3), а за $d=o$ и $b=1$ во (5), додека од (4) за $c=o$ се добива (6). При ваквите специјални вредности на b и d општноста во распоредот на генераторните точки од A_n не се нарушува, па доказот на теоремата за останатите идентитети следува од доказот за идентитетите (1) и (4).

Ако генераторните точки 3, 4 и 5 од теоремата A_n се изберат на една права, точките 5, 7 и 8 ќе совпаднат, и таблицата за припадност на A_n ќе го добие обликот:

$$1\ 2\ 3 \quad 3\ 4\ 5 \quad \left.\begin{matrix} 1\ 4 \\ 2\ 5 \end{matrix}\right\}6 \quad \left.\begin{matrix} 1\ 5 \\ 3\ 6 \end{matrix}\right\}9 \ldots$$

$$\left.\begin{matrix} 3\ 5 \\ 2\ 2(n+2)+1 \end{matrix}\right\}2(n+3) \quad \left.\begin{matrix} 3\ 6 \\ 1\ 2(n+3) \end{matrix}\right\}2(n+3)+1 \ \Big|\ 2\ \ 4\ \ 2(n+3)+1.$$

Извршувајќи пренумерација на сите точки по шемата

$$\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 9 \ldots 2(n+2)+1\ \ 2(n+3)\ \ 2(n+3)+1 \\ 2\ 5\ 1\ 6\ 4\ 3\ 7 \ldots 2(n+1)+1\ \ 2(n+2)\ \ 2(n+2)+1 \end{matrix}$$

и сметајќи ги 1, 2, 3 и 4 за генераторни, ќе ја добиеме конфигурацоната теорема

$$B_n\colon\ \left.\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}\right\}5 \quad \left.\begin{matrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{matrix}\right\}6 \quad \left.\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{matrix}\right\}7 \quad \left.\begin{matrix}1 & 4\\ 5 & 7\end{matrix}\right\}8 \ldots$$

$$\left.\begin{matrix}1 & 4\\ 5 & 2(n+1)+1\end{matrix}\right\}2(n+2) \quad \left.\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 2(n+2)\end{matrix}\right\}2(n+2)+1 \;\Big|\; 5 \;\; 6 \;\; 2(n+2)+1.$$

Оваа конфигурациона теорема преставува еден вид обопштување на Фановата теорема 7_3, $B_1 \equiv 7_3$. Спрема начинот како е добиена теоремата B_n, очигледно е дека важи

Теорема 2. $A_n \to B_n$[1])

Теорема 3. *Во секое природно тело на рамнината* $\pi(B_n)$ *точни се идентитетите*

(7) $T_{n+1}(a, b, c) = c$ (8) $T_n(a, b, ab) = o$

(9) $T_{n+1}(1, b, c) = c$ (10) $\underset{n+1}{T}(1, b, c) = c$

(11) $a +_{n+1} c = c$ (12) $c\ {}_{n+1}{+}\ a = c$

(13) $a +_n a = o$ (14) $a\ {}_n{+}\ a = o$,

и обратно, рамнината, чие што секое природно тело содржи било кој од горните идентитети е од облик $\pi(B_n)$.

Доказ. Доказот на теоремата за идентитетот (7) се добива ако за генераторни се изберат точките: $1 \equiv P_x$, $2 \equiv [b]$,, $3\,(o, a.\, b_\circ\, c)$ и $4\,(a, a.\, b_\circ\, c)$. Притоа се добива: $5 \equiv P_y$, $6\,(a, T_2(a, b, c))$, $7\,(o, c)$, $8\,(a, c)$, $9\,(o, r_1)$, каде е $T_1(a, b, r_1) = c$, $10\,(a, r_1)$, $11\,(o, r_2)$, каде е $T_1(a, b\ r_2) = r_1$, од каде, земајќи во предвид, $T_1(a, b, r_1) = c$ и (t_1) т. 2, се добива $T_2(a, b, r_2) = c$, ... Индуктивно лесно се покажува дека точката $2(n+2)+1$ ги има координатите $x_{2(n+2)+1} = o$ и $y_{2(n+2)+1} = r_{n-1}$ каде $T_{n-1}(a, b, r_{n-1}) = c$.

После ова доказот на теоремата се добива исто како и доказот на теоремата 1, само што при елиминирањето на r_{n-1} од равенката $y_6 = y_{2(n+2)+1}$ и $T_{n-1}(a, b, r_{n-1}) = c$, треба да се земе во предвид (t_1) т. 2.

Доказот на теоремата ќе се добие за идентитетот (10) ако за генераторни се изберат точките: $1 \equiv P_x$, $2 \equiv 0$, $3 \equiv [c]$ и $4\,(1, 1.\, c_\circ\, b)$; додека за идентитетот (12) за генераторни треба да се изберат точките $1 \equiv [1]$, $2 \equiv P_x$, $3\,(c, c+a)$ и $4\,(c+a, c+\mathrm{a})$.

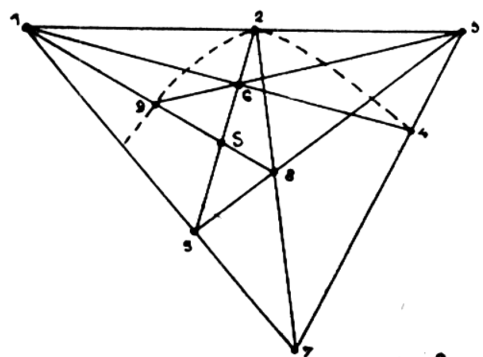
За останатите идентитети, доказите следуваат од доказите за идентитетите (7) и (12), и тоа: (8) од (7) за $c = o$; (9) од (7) за $a = 1$; (11) од (7) за $b = 1$; (13) од (7) за $b = 1$ и $c = o$ и (14) од (12) за $c = o$.

---

[1]) Ако од тоа што во една рамнина π е реализирана теоремата K_1, следува дека во π е реализирана теоремата K_2, ќе речеме дека од K_1 следува K_2, или K_1 ја повлекува K_2, а ќе пишуваме $K_1 \to K_2$. За конфигурационите теореми K_1 и K_2 ќе речеме дека се еквивалентни, ако $K_1 \to K_2$ и $K_2 \to K_1$.

Теорема 4. *Конфиїурационише шеореми* 7_3 и A_1 *се еквиваленшни.*

Доказ. Од теоремата 2 за $n=1$ имаме $A_1 \to 7_3$. Треба значи уште да докажеме дека $7_3 \to A_1$. Нека покрај останатите точки од теоремата A_1 обра-



сл. 2

зуваме уште една нова точка S, пресечна за правите $1 \cap 8$ и $2 \cap 5$ (на сликата нагледно е прикажана теоремата A_1). Ако ја примениме теоремата 7_3 над четириаголникот 1, 2, 5 и 8, ќе добиеме дека точките 3, 7 и S припаѓаат на една права. Ако ја примениме истата теорема над четириаголникот 2, 3, 9 и S, ќе добиеме дека на правата $2 \cap 9$ припаѓа заедничката точка од правите $3 \cap S$ и $1 \cap 6$, односно, на правата $2 \cap 9$ припаѓа точката 4, што и ја докажува теоремата.

Теорема 5. 1°. *Ако е* $m=k(n+1)-1$, *во рамнината* $\pi(B_n)$ *може да се реализира шеоремаша* B_m, *йришоа* B_m *деїенерира во* B_n, *йа ќе речеме дека* B_m *деїенерирано се реализира во* $\pi(B_n)$.

2° *Ако* $n+1$ и $m+1$ *не се релашивно йросши, рамнинаша во која можаш едновремено да се реализираат шеоремише* B_n *и* B_m *е од оалик* $\pi(B_d)$, *каде* $d+1$ *е најїолемиош заеднички делишел на* $n+1$ *и* $m+1$, *а* B_n *и* B_m *се шоїаш деїенерирано реализирани во* $\pi(B_d)$.

3° *Ако се* $n+1$ *и* $m+1$ *релашивно йросши, не йосшои рамнина во која можаш едновремено да се реализираш* B_n *и* B_m.

Доказ. 1° Ако е $m=k(n+1)-1$, таблицата за припадност на B_m можеме да ја напишеме на следниот начин:

$$\left.\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}\right\}5 \quad \left.\begin{matrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{matrix}\right\}6 \ \ldots \ \left.\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 2(n+2)\end{matrix}\right\}2(n+2)+1$$

$$\left.\begin{matrix}1 & 4\\ 5 & 2(n+2)+1\end{matrix}\right\}2(n+3) \ldots \left.\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 2(2n+3)\end{matrix}\right\}2(2n+3)+1 \ldots$$

....

$$\left.\begin{matrix}1 & 4\\ 5 & 2[(k-1)n+k]+1\end{matrix}\right\}2[(k-1)n+k+1] \ \ldots \ \left.\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 2(kn+k+1)\end{matrix}\right\}2(kn+k+1)+1.$$