Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите
од Н Р Македонија, кн. 1, 1950

Bulletin de la Société des mathématiciens et des physiciens
de la R. P. de Macédoine, t. 1, 1950

ЕДНА ТЕОРЕМА ОД ТЕОРИЈАТА НА ГРАНИЦИТЕ

ЈОЖЕ УЛЧАР

Ќе ја докажеме оваа теорема:

I. Ако се $f(x,\alpha)$ и $g(x,\alpha)$ функции, непрекинати (како функции од две променливи) во областа

$$(J_x) \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

$$(J_\alpha) \qquad c \leqslant \alpha \leqslant d,$$

и ако за сите x од J_x — со исклучок евентуално во краен број изолирани точки — важи

$$(1) \qquad \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{f(x,\alpha)}{g(x,\alpha)} = k,$$

каде што k е константа, а α_0 му припаѓа на J_α, тогаш,

1) ако $\int_a^b g(x,\alpha)\,dx$ во некоја околина на α_0 не е идентично нула е и

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{\int_a^b f(x,\alpha)\,dx}{\int_a^b g(x,\alpha)\,dx} = k;$$

2) ако е $\int_a^b g(x,\alpha)\,dx \equiv 0$ во некоја околина на α_0, е и $\int_a^b f(x,\alpha)\,dx \equiv 0$ во таа околина.

II. Теоремата е верна и тогаш ако е J_α произволна низа броеви со α_0 како точка на згустување, и ако за $f(x,\alpha)$ и $g(x,\alpha)$ претпоставиме дека $\frac{f(x,\alpha)}{g(x,\alpha)}$ равномерно се стреми кон k при $\alpha \to \alpha_0$.

Доказ:

Ако $g(x, \alpha_0) \neq 0$, т. е. ако

$$\frac{f(x, \alpha_0)}{g(x, \alpha_0)} = k,$$

теоремата е очигледно верна.

А ако е $g(x, \alpha_0) \equiv 0$, кој случај претставува интерес, тогаш е, поради претпоставената егзистенца на границата (1), и $f(x, \alpha_0) \equiv 0$, а за α во некоја околина на α_0 $g(x, \alpha) \neq 0$.

Од (1) и непрекинатоста на $f(x, \alpha)$ и $g(x, \alpha)$ следува за x од J_x — со исклучение евентуално на краен број изолирани точки — и за $\alpha \neq \alpha_0$ од некоја околина на α_0 дека

$$\frac{f(x, \alpha)}{g(x, \alpha)} = k + \varepsilon(x, \alpha), \tag{2}$$

при кое функцијата $\varepsilon(x, \alpha)$ се стреми за $\alpha \to \alpha_0$ кон нула, и тоа равномерно во однос на x од J_x.

Спрема тоа, при произволно претпишан позитивен ε може да се најде таков број δ, независен од x, да е исполнето неравенството

$$|\varepsilon(x, \alpha)| < \varepsilon \tag{3}$$

едновремено за сите x од J_x, само ако е исполнет условот

$$|\alpha - \alpha_0| < \delta. \tag{4}$$

Од (2) следува

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = k \cdot \int_a^b g(x, \alpha)\, dx + \int_a^b \varepsilon(x, \alpha)\, g(x, \alpha)\, dx, \tag{5}$$

што важи за α од некоја околина на α_0. Во таа околина е, при фиксен α, $g(x, \alpha) \neq 0$, затоа, општо и $\int_a^b g(x, \alpha)\, dx \neq 0$. Порад тоа е, во тој случај,

$$\frac{\int_a^b f(x, \alpha)\, dx}{\int_a^b g(x, \alpha)\, dx} = k + \frac{\int_a^b \varepsilon(x, \alpha)\, g(x, \alpha)\, dx}{\int_a^b g(x, \alpha)\, dx}.$$

За оние α кои го задоволуваат условот (4) е, поради (3),

$$\left| \int_a^b \varepsilon(x,\alpha)\, g(x,\alpha)\, dx \right| < \varepsilon \left| \int_a^b g(x,\alpha)\, dx \right|$$

и затоа

$$\left| \frac{\int_a^b f(x,\alpha)\, dx}{\int_a^b g(x,\alpha)\, dx} - k \right| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{\int_a^b f(x,\alpha)\, dx}{\int_a^b g(x,\alpha)\, dx} = k.$$

Ако пак е, при специален избор на интеграционите граници, $\int_a^b g(x,\alpha)\, dx \equiv 0$, тогаш следува од (5) дека е и

$$\int_a^b g(x,\alpha)\, dx \equiv 0.$$

Со тоа е првиот дел (I) на теоремата докажан.

Целиот тек на докажувањето останува ист ако J_α не е интервал, туку каква да е низа броеви со точка на згустувањето во α_0, при кое α_0 не мора да му припаѓа на J_α, и при претпоставка дека $\frac{f(x,\alpha)}{g(x,\alpha)}$ равномерно се стреми кон k при $\alpha \to \alpha_0$.

Со тоа е докажан и вториот (II) дел на теоремата.

Сето ова важи, очигледно, и тогаш кога α_0 е ∞.

Примери:

1. Нека е $f(x,\alpha) \equiv \sin \alpha x$, $g(x,\alpha) \equiv \alpha x$.
Бидејќи за сите x освен за изолираната точка $x = 0$ важи

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1,$$

треба да е, според теоремата, и

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{\int_a^b \sin \alpha x \, dx}{\int_a^b \alpha x \, dx} = 1,$$

ако е $\int_a^b \alpha x \, dx \neq 0$ во некоја околина на $\alpha = 0$; а ако е $\int_a^b \alpha x \, dx \equiv 0$ треба да е и $\int_a^b \sin \alpha x \, dx \equiv 0$ во таа околина. Тоа може да се верифицира навистина и директно. За $a + b \neq 0$ имаме при $\alpha \to 0$

$$\frac{\int_a^b \sin \alpha x \, dx}{\int_a^b \alpha x \, dx} = \frac{\sin\left(\frac{a+b}{2} \cdot \alpha\right)}{\frac{a+b}{2} \cdot \alpha} \cdot \frac{\sin\left(\frac{a-b}{2} \cdot \alpha\right)}{\frac{a-b}{2} \cdot \alpha} \to 1;$$

а во случај $a + b = 0$, имаме за секој α

$$\int_a^b \alpha x \, dx = \int_{-a}^{+a} \alpha x \, dx \equiv 0,$$

но тогаш е и

$$\int_a^b \sin \alpha x \, dx = \int_{-a}^{+a} \sin \alpha x \, dx \equiv 0,$$

во согласност со теоремата.

2. Нека е $f(x, \alpha)$ остатокот $R_n(x)$ од еден ред. Тука е, значи, $\alpha \equiv n$. Ако $R_n(x)$ се стреми во однос на x од $[a, b]$ равномерно кон нула при $n \to \infty$, тогаш можеме за $\alpha_0 = \infty$, земајќи $g(x, \alpha) \equiv 1$, да ја примениме теоремата. Поради

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R_n(x)}{1} = 0$$

имаме и

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b R_n(x) \, dx = 0,$$

што е во склад со познатата теорема за интегрирање на редовите.

Auszug

EIN GRENZWERTSATZ

von

JOŽE ULČAR

Hier wird felgender Satz bewiesen:

Wenn die Funktionen $f(x, \alpha)$ und $g(x, \alpha)$ im Bereiche

$$(J_x) \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

$$(J_\alpha) \qquad c \leqslant \alpha \leqslant d$$

als Funktionen von zwei Veränderlichen stetig sind und wenn für alle x aus dem J_x – mit Ausnahme, eventuell, von einer endlichen Zahl von isolierten Punkten — die Relation

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{f(x, \alpha)}{g(x, \alpha)} = k$$

besteht, wo k eine Konstante ist und α_0 dem Intervall J_α gehört, dann ist

1. im Falle, daß $\int_a^b g(x, \alpha)\, dx$ in einer Umgebung von α_0 nicht identisch verschwindet, auch

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{\int_a^b f(x, \alpha)\, dx}{\int_a^b g(x, \alpha)\, dx} = k,$$

und

2. wenn in einer Umgebung von α_0 $\int_a^b g(x, \alpha)\, dx \equiv 0$ ist, ist auch $\int_a^b f(x, \alpha)\, dx \equiv 0$ in dieser Umgebung.

Der Satz ist auch dann giltig wenn J_α eine Zahlenfolge mit α_0 als Häufungspunkt ist und wenn man für $f(x, \alpha)$ und $g(x, \alpha)$ voraussetzt, daß $\frac{f(x, \alpha)}{g(x, \alpha)}$ gleichmäßig für alle x aus dem J_x gegen k bei $\alpha \to \alpha_0$ strebt.

Der Satz, der bei $g(x, \alpha_0) \not\equiv 0$ trivial ist, könnte im Falle $g(x, \alpha) \equiv 0$ (und folglich $f(x, \alpha_0) \equiv 0$) von Nutzen sein.