ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 8 (1955), № 1
ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 8 (1955), № 1

Посебан отисак
Tirage à part

ЈОЖЕ УЛЧАР

О НЕИНЦИДЕНТНИМ СТРАНАМА НЕКИХ ПОЛИТОПА

JOŽE ULČAR

ÜBER DIE NICHTINZIDENTEN SEITEN EINIGER POLYTOPE

Скопје — Skopje
1955

О НЕИНЦИДЕНТНИМ СТРАНАМА НЕКИХ ПОЛИТОПА

ЈОЖЕ УЛЧАР

У једном свом раду (cf. [1]) Ђ. Курепа третирао је и решио проблем одређивања скупа максималног броја међусобно неинцидентних страна једног симплекса у Еуклидовом n-димензионалном простору $\mathbf{R}_n$, а на тај се проблем осврнуо и у једном другом раду (cf. [2]). По његовој препоруци ми ћемо тај проблем разрадити у општијем случају. У овом раду је третиран тај проблем за неке специјалне комплексе. Добијени резултати дају у специјалном случају на пр. решење одређивања скупа максималног броја међусобно неинцидентних страна код правилних политопа, код симплексних политопа у $\mathbf{R}_n$ са $n+2$ темена, као и за дуалне творевине ових последњих.

Глава I

КОМПЛЕКСИ И НЕКИ СКУПОВИ ЊИХОВИХ НЕИНЦИДЕНТНИХ СТРАНА

Комплекс. Узмимо један коначан скуп K_n чији елементи су празни скуп v и конвексни политопи димензије $i \leqslant n$, а који леже у неком Еуклидовом простору. Два било која политопа из K_n нека се не секу, а свака страна сваког од ових политопа нека је истотако елеменат скупа K_n. Политопе димензије i овог скупа обележићемо са

$$\alpha_i^{(1)},\ \alpha_i^{(2)}, \cdots,\ \alpha_i^{(m_i)} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

и ставићемо $v=\alpha_{-1}$. Ако будемо хтели означити ма који i-димензионални политоп из K_n, писаћемо кратко α_i. Скуп K_n уређујемо делимично тиме што стављамо $v < \alpha_i$ за сваки $i > -1$, а $\alpha_i < \alpha_j$ онда и само онда ако α_i инцидира са α_j и ако је при томе $i < j$; у осталим случајевима сматраћемо да су α_i и α_j неупоредиви. Овако делимично уређени скуп K_n зове се *полиедарски комплекс* или кратко *комплекс*. Елементе комплекса K_n зваћемо и странама тог комплекса.

Број елемената α_{i+1} који су потомци једног елемента $\alpha_i^{(v)}$ у K_n означићемо са $n_{i,i+1}^{(v)}$. Број $n_{i,i+1}^{(v)}$ казује, према томе, са колико политопа α_{i+1} инцидира политоп $\alpha_i^{(v)}$ комплекса K_n.

Уводимо сада у наш скуп обратно уређење. Тиме добијамо скуп K_n^*. Са $n_{i+1,i}^{(\mu)}$ означићемо број елемената α_i који су наследници елемента $\alpha_{i+1}^{(\mu)}$ у K_n^*. Број $n_{i+1,i}^{(\mu)}$ показује, другим речима, са колико политопа α_i инцидира политоп $\alpha_{i+1}^{(\mu)}$ комплекса K_n.

Силно свезни комплекси. Ми ћемо у овом раду посматрати само неке специјалне комплексе, наиме најпростије типове такозваних силно свезних комплекаса (cf. [4], стр. 316).

Комплекс K_n зове се *силно свезан* или *силно конексан*, ако су задовољени ови услови:

а) ако је K_n *димензионално-хомоген*, тј. ако је сваки његов елеменат α_i ($i < n$) страна неког елемента $\alpha_n \in K_n$;

б) ако било која два елемента α_n', $\alpha_n'' \in K_n$ можемо повезати једним коначним низом n-димензионалних политопа из K_n: $\alpha_n', \cdots, \alpha_n''$, тако да било која два суседна елемента у овом низу имају једну заједничку $(n-1)$-димензионалну страну комплекса K_n.

У даљем излагању требаће нам ова теорема:

[1] *Ма које две i-димензионалне стране α_i' и α_i'' једног силно свезног комплекса K_n могу се повезати једним низом i-димензионалних страна*

$$\alpha_i' \equiv \alpha_i^{(i_1)},\ \alpha_i^{(i_2)}, \cdots,\ \alpha_i^{(i_{s_i})} \equiv \alpha_i''$$

у коме свака два суседна члана имају једну заједничку $(i-1)$-димензионалну страну.

Рећи ћемо кратко да политопе α_i' и α_i'' можемо повезати једним *ланцем* i-димензионалних политопа комплекса K_n.

Теорему ћемо лако доказати индукцијом. Нака буде α_j' ($j = i,\ i+1,\ i+2, \cdots, n-1$) једна j-димензионална страна комплекса K_n која инцидира са α_i', а α_j'' једна j-димензионална страна од K_n која инцидира са α_i''.

Претпоставимо да је могуће α_j' и α_j'' ($j = k+1$) повезати једним ланцем $(k+1)$-димензионалних политопа комплекса K_n. Према овој претпоставци постоји један низ

$$\alpha_j' \equiv \alpha_j^{(j_1)},\ \alpha_j^{(j_2)}, \cdots,\ \alpha_j^{(j_{s_j})} \equiv \alpha_j'' \quad (j = k+1)$$

чији суседни чланови имају заједничку по једну k-димензионалну страну. Нека те заједничке стране буду редом политопи $\alpha_k' \equiv \alpha_k^{(\mu_1)},\ \alpha_k^{(\mu_2)}, \cdots,\ \alpha_k^{(\mu_{s_j}-1)} \equiv \alpha_k''$.

Сваки конвексан политоп је силно свезан, према томе и сваки α_{k+1} ($k > 0$). Зато ма које две k-димензионалне стране било којега политопа α_{k+1} можемо повезати једним ланцем k-димензионалних политопа. На политопу α_{k+1}' повезујемо $\alpha_k' \equiv \alpha_k^{(\mu_1)}$ са $\alpha_k^{(\mu_2)}$, на политопу $\alpha_j^{(j_2)}$ ($j = k+1$) повезујемо $\alpha_k^{(\mu_2)}$ са $\alpha_k^{(\mu_3)}$ итд. Према томе α_k' могуће је повезати са α_k'' једним ланцем k-димензионалних политопа:

$$\alpha_k' \equiv \alpha_k^{(\mu_1)}, \cdots, \alpha_k^{(\mu_2)}, \cdots, \alpha_k^{(\mu_3)}, \cdots, \cdots, \alpha_k''.$$

Показали смо да је α_j' могуће повезати са α_j'' за $j=k$, при претпоставци да је то могуће за $j=k+1$. Но, то је, због силне свезности K_n, могуће за $j=n$. Тиме је индукцијом доказано да је то могуће и за $j=1, 2, 3, \cdots, n-1$, што је требало доказати.

Неке теореме из области многозначних пресликавања. У даљем излагању служићемо се овом теоремом:

[2] *Нека буду A и B два коначна скуйа, а f једно йресликавање скуйа A на скуй B шийа $(\geqslant r, \leqslant s)$, шшо значи да код йресликавања f сваком $x \in A$ одговара r или више од r елеменаша скуйа B, а сваком елеменшу $y \in B$ код йресликавања f^{-1} одговара s или мање од s елеменаша скуйа A. Тада важи* (cf. [1] т. 1. 1, [2] p. 1134):

$$s \cdot k\,B \geqslant r \cdot k\,A.$$

У случају да је $r > s$ следује

$$k\,B \geqslant \frac{r}{s} \cdot k\,A > k\,A.$$

Према томе:

[3] *Ако између коначних скуйова A и B йостоји једна кореснонденција шийа $(\geqslant r, \leqslant s)$, а $r > s$, онда је $k\,B > k\,A$.*

Као [2] доказује се и

[4] *Ако између коначних скуйова A и B йостоји једна кореснонденција шийа (r, s), онда је $s \cdot k\,B = r \cdot k\,A$.*

Лако се доказује и ово:

[5] *Ако код услова шеореме* [2] *йостоји барем један елеменаш $x \in A$ за који важи $k\,f(x) > r$, или барем један елеменаш $y \in B$ за који важи $k f^{-1}(y) < s$, онда је $s \cdot kB > r \cdot kA$. Од $r \geqslant s$ следује*, значи, $kB > kA$.

Неупоредиви елементи скупа K_n. Проблем изналажења скупа максималног броја међусобно неинцидентних страна код комплекса K_n идентичан је са проблемом изналажења оног подскупа скупа K_n који је састављен од највећег могућег броја неупоредивих елемената у K_n. Зато ћемо формулисати једну теорему о неупоредивим елементима у једном скупу, којом ћемо се касније служити.

Наш скуп можемо писати у облику

(1) $$K_n = R_0 \cup R_1 \cup \cdots \cup R_{n+1},$$

где $R_i \equiv R_i\,K_n$ означавају слојеве скупа K_n. Очигледно је

$$R_0=\{v\},\ R_1=\{\alpha_0^{(1)},\ \alpha_0^{(2)},\cdots\},\ R_2=\{\alpha_1^{(1)},\ \alpha_1^{(2)},\cdots\},\cdots$$
$$R_n=\{\alpha_{n-1}^{(1)},\ \alpha_{n-1}^{(2)},\cdots\},\ R_{n+1}=\{\alpha_n^{(1)},\ \alpha_n^{(2)},\cdots\}$$

Сваки подскуп A скупа K_n можемо претставити у облику

$$A=(A\cap R_0)\cup(A\cap R_1)\cup\cdots\cup(A\cap R_{n+1}). \tag{2}$$

Нека је A један *антиланац* скупа K_n, тј. један такав подскуп скупа K_n који се састоји само од неупоредивих елемената у K_n. Претпоставимо надаље да је

$$A\cap R_\alpha\neq v,$$
$$\text{и, ако } \alpha\neq 0,\quad A\cap R_\xi=v\quad(\xi<\alpha). \tag{3}$$

У овом случају лако се доказује да се скуп A^α, који се добија од скупа A кад се у њему елементи скупа $A\cap R_\alpha$ замене њиховим непосредним наследницима у K_n, опет састоји само од неупоредивих елемената скупа K_n (cf. [1] lem. 3. 1). Значи:

[6] *Ако је A један антиланац у K_n за који важе релације (3), онда је скуп*

$$(A\setminus M)\cup N,$$

где је

$$M=A\cap R_\alpha,\quad N=\bigcup_x R_0(x,\infty)\quad(x\in A\cap R_\alpha)$$

опет један антиланац у K_n.

Један специјални случај комплекса K_n. Разгледајмо најпре онај специјални случај комплекса K_n, када *свака* страна α_i i-те димензије има у K_n *исти* број $(n_{i,i+1})$ потомака α_{i+1}, а *свака* страна α_{j+1} j-димензије *исти* број $(n_{j+1,j})$ наследника α_j у K_n^*. У овом случају важи према томе

$$\begin{aligned} &n_{i,i+1}^{(1)}=n_{i,i+1}^{(2)}=\cdots=n_{i,i+1}^{(m_i)}=n_{i,i+1}\\ &n_{j+1,j}^{(1)}=n_{j+1,j}^{(2)}=\cdots=n_{j+1,j}^{(m_{j+1})}=n_{j+1,j}\end{aligned}\qquad (i,j=0,1,2,\cdots n) \tag{4}$$

Ово ћемо шематски приказати овако

$$\alpha_{-1}\ \underset{1}{\overset{n_{-1,0}}{\rightleftarrows}}\ \alpha_0\ \underset{n_{1,0}}{\overset{n_{0,1}}{\rightleftarrows}}\ \alpha_1\ \underset{n_{2,1}}{\overset{n_{1,2}}{\rightleftarrows}}\ \alpha_2\cdots\alpha_{n-2}\ \underset{n_{n-1,n-2}}{\overset{n_{n-2,n-1}}{\rightleftarrows}}\ \alpha_{n-1}\ \underset{n_{n,n-1}}{\overset{n_{n-1,n}}{\rightleftarrows}}\ \alpha_n$$

Ако је код тога још и $n_{n-1,n}=1$, $kR_{n+1}=1$, онда ћемо комплекс K_n обележавати и са $K_n\,(m_0,\ m_1,\cdots,\ m_{n-1})$, да би тиме био уочљив одмах и број страна димензије $0, 1, 2,\cdots, n-1$ комплекса.

За скупове M и N можемо у овом случају казати следеће.

Сваки елеменат $a \in M$ има $n_{\alpha-1,\alpha}$ непосредних наследника у K_n, а према томе и у N. А сваки елеменат $b \in N$ је потомак $n_{\alpha,\alpha-1}$ елемената из R_α у скупу K_n; но сви ови елементи не морају бити у M. Зато је сваки $b \in N$ потомак од $\leqslant n_{\alpha,\alpha-1}$ елемената из M. На тај начин створена је међу скуповима M и N једна кореспонденција типа $(n_{\alpha-1,\alpha}, \leqslant n_{\alpha,\alpha-1})$.

Ако је при томе

$$n_{\alpha-1,\alpha} > n_{\alpha,\alpha-1},$$

онда важи, према [3], да је

$$kN > kM.$$

Према томе, замењујући у $A = (A \setminus M) \cup M$ скуп M са скупом N, добија се један скуп A^α који се на основу [6] састоји из самих неупоредивих елемената у K_n, а да при томе важи

$$kA^\alpha > kA.$$

Са добијеним скупом A^α, за који важи

$$A^\alpha \cap R_\xi = v \quad (\xi \leqslant \alpha),$$

понављамо исти поступак. Ако је наиме α' најмања вредност за ξ тако да је

$$A^\alpha \cap R_\xi \neq v \quad (\xi > \alpha),$$

онда у скупу

$$A^\alpha = (A^\alpha \cap R_{\alpha'}) \cup (A^\alpha \setminus R_{\alpha'})$$

замењамо скуп $A^\alpha \cap R_{\alpha'}$ са скупом $\bigcup\limits_x R_0(x, \infty)$ $(x \in A^\alpha \cap R_{\alpha'})$. Тиме добијамо опет један скуп $A^{\alpha'}$ од неупоредивих елемената скупа K_n. Ако је при томе

$$n_{\alpha'-1,\alpha'} > n_{\alpha',\alpha'-1},$$

онда би било

$$kA^{\alpha'} > kA^\alpha \text{ и } A^{\alpha'} \cap R_\xi = v \quad (\xi \leqslant \alpha').$$

Претпоставимо сада да за бројеве $n_{i,i+1}$, $n_{i+1,i}$ важе релације:

$$\begin{aligned} &n_{-1,0} > n_{0,-1} \\ &n_{0,1} > n_{1,0} \\ (5) \qquad &n_{1,2} > n_{2,1} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$n_{\nu-1,\nu} > n_{\nu,\nu-1}$$

$$n_{\nu,\nu+1} \leqslant n_{\nu+1,\nu}.$$

У том случају можемо на горе описани начин наћи један скуп A^ν чији елементи су неупоредиви у K_n, а за који важи

$$A^\nu \cap R_\xi = \nu \ (\xi \leqslant \nu) \quad \text{и} \quad k A^\nu > k A.$$

Извршимо сада аналогно размишљање за скуп K_n^*. Имамо

$$R_0 K_n^* = R_{n+1} K_n, \quad R_1 K_n^* = R_n K_n, \cdots$$

Претпоставимо да важи

$$\begin{array}{ll} & n_{n,n-1} > n_{n-1,n} \\ & n_{n-1,n-2} > n_{n-2,n-1} \\ (6) & n_{n-2,n-3} > n_{n-3,n-2} \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & n_{\mu,\mu-1} > n_{\mu-1,\mu} \\ & n_{\mu-1,\mu-2} \leqslant n_{\mu-2,\mu-1}. \end{array}$$

На аналоган начин као горе следује да можемо наћи такав подскуп A_μ скупа K_n^* од неупоредивих елемената скупа K_n^*, а према томе и у K_n, за који важи

$$A_\mu \cap R_\xi (K_n) = \nu \ \ (\xi > \mu) \quad \text{и} \quad k A_\mu > k A.$$

Тиме смо доказали ову теорему:

[7] *Нека је дат делимично уређени скуп K_n за који важи (1), и у коме сваки елеменат $a \in R_{i+1}$ има $n_{i,i+1}$ наследника у R_{i+2}, а сваки елеменат $b \in R_{i+2}$ је потомак $n_{i+1,i}$ елемената из R_{i+1}. Ако важе релације (5) и (6), онда можемо наћи један такав антиланац A_μ^ν скупа K_n за који важи*

$$A_\mu^\nu \cap R_\xi = \nu \quad (\mu < \xi \leqslant \nu)$$

и

$$k A_\mu^\nu > k A,$$

где је A ма који антиланац у K_n који има бар један елеменат у скупу $\bigcup_\xi R_\xi$ $(\mu < \xi \leqslant \nu)$.

Скуп A_μ^ν може се, значи, претставити у виду

$$A_\mu^\nu = \bigcup_x (A_\mu^\nu \cap R_x) \quad (\nu < x \leqslant \mu).$$

Он има своје елементе само у слојевима

$$R_{\nu+1},\ R_{\nu+2}, \cdots,\ R_\mu . \tag{7}$$

1. Претпоставимо прво да низ (7) има само један члан, тј. да је $\nu+1=\mu$. У овом случају елементи скупа A_μ^ν леже у једном јединим слоју, наиме у R_μ. Значи

$$A_\mu^\nu \subseteq R_\mu ,$$

одакле

$$kR_\mu \geqslant kA_\mu^\nu .$$

Пошто је и R_μ један антиланац у K_n то је он, према томе, најопсежнији антиланац у K_n, тј. такав да за њега важи $kR_\mu > kA$, ако је A ма који антиланац у K_n који има барем један елеменат у неком слоју R_ξ ($\xi \neq \mu$). А пошто је R_μ и максималан антиланац у K_n, тј. не постоји ниједан елеменат у K_n који не би био упоредив са бар једним елементом из R_μ, то *је R_μ и најопсежнији максимални антиланац у K_n.*

Показали смо:

[8] *Ако уз претпоставке теореме* [7] *важи* $\nu+1=\mu$, *онда је $R_{\nu+1}$ најопсежнији максимални антиланац у K_n.*

Предочимо то и шемом:

$$\alpha_{-1} \underset{n_{0,-1}}{\overset{n_{-1,0}}{\rightleftarrows}} \alpha_0 \underset{n_{1,0}}{\overset{n_{0,1}}{\rightleftarrows}} \alpha_1 \cdots \alpha_{\nu-1} \underset{n_{\nu,\nu-1}}{\overset{n_{\nu-1,\nu}}{\rightleftarrows}} \boxed{\alpha_\nu} \underset{n_{\nu+1,\nu}}{\overset{n_{\nu,\nu+1}}{\rightleftarrows}} \alpha_{\nu+1} \cdots \alpha_n \underset{n_{n+1,n}}{\overset{n_{n,n+1}}{\rightleftarrows}} \alpha_{n+1}$$

Сви бројеви $n_{i,i+1}$ за које важи $n_{i,i+1} > n_{i+1,i}$ су на левој страни од уцртаног правоугаоника, а сви броеви $n_{j,j+1}$ за које важи $n_{j,j+1} < n_{j+1,j}$, су десно од тог правоугаоника. У самом правоугаонику је означена једна страна комплекса K_n из оног слоја скупа K_n који је најопсежнији максимални антиланац у K_n.

2. Сада ћемо претпоставити да низ (7) има два члана, значи да је $\nu+2=\mu$. Низ (7) се састоји онда од слојева $R_{\nu+1}$ и $R_{\nu+2}$. У том случају је

$$n_{\nu,\nu+1} = n_{\nu+1,\nu}, \tag{8}$$

јер ако би било $n_{\nu,\nu+1} > n_{\nu+1,\nu}$, онда $R_{\nu+1}$ не би припадао низу (7), а ако би било $n_{\nu,\nu+1} < n_{\nu+1,\nu}$, онда $R_{\nu+2}$ не би припадао том низу. Тиме је створена међу скуповима $R_{\nu+1}$ и $R_{\nu+2}$ једна кореспонденција типа $(n_{\nu,\nu+1}, n_{\nu+1,\nu})$. На основу теореме [4] следује због (8) да је

$$(9) \qquad k R_{\nu+1} = k R_{\nu+2}.$$

Нека буде A један антиланац скупа K_n чији елементи су сви у слојевима $R_{\nu+1}$ и $R_{\nu+2}$. Показаћемо да је увек

$$(10) \qquad k R_{\nu+1} = k R_{\nu+2} > k A,$$

ако A није идентичан са једним од скупова $R_{\nu+1}$ и $R_{\nu+2}$.

Доказ. Скуп A ћемо писати у облику

$$A = (R_{\nu+1} \cap A) \cup (R_{\nu+2} \cap A).$$

Међу скуповима $B = R_{\nu+1} \cap A$ и $C = \bigcup_x R_0(x, \infty)$ $(x \in R_{\nu+1} \cap A)$ постоји једна кореспонденција $\varkappa$ типа $(n_{\nu,\nu+1}, \leqslant n_{\nu+1,\nu})$ или, због (9), типа $(n_{\nu,\nu+1}, \leqslant n_{\nu,\nu+1})$. Наиме сваком $b \in B$ кореспондира у C $n_{\nu,\nu+1}$ елемената — наследника елемента b у K_n; а сваком $c \in C$ кореспондирају у B $\leqslant n_{\nu+1,\nu}$ елемената — они његови претходници у K_n који леже у B. Зато је према [2]

$$k C \geqslant k B.$$

а) Ако је $k C > k B$, онда је — пошто су на основу [6] скупови $R_{\nu+2} \cap A$ и C дисјунктни —

$$k R_{\nu+2} \cap A \leqslant k R_{\nu+2} - k C < k R_{\nu+2} - k B,$$

и зато

$$kA = k(R_{\nu+1} \cap A) + k(R_{\nu+2} \cap A) < k R_{\nu+2}.$$

Тиме је тврђење (10) за случај $k C > k B$ доказано.

б) Претпоставимо сада да је $k B = k C$.

Ако би постојало барем једно $c \in C$, коме би у B кореспондирало мање од $n_{\nu,\nu+1}$ елемената код кореспонденције $\varkappa$, онда би било, према теореми [5], $k C > k B$, што је апсурд.

Остаје још последња могућност да с в а к о м $c \in C$ кореспондира код $\varkappa$ у B т о ч н о $n_{\nu,\nu+1}$ елемената. А то значи да у K_n ниједан елеменат из B нема наследника у $R_{\nu+2} \setminus C$, а ниједан елеменат из C да нема претходника у $R_{\nu+1} \setminus B$. Но то је немогуће. Ако се наиме крећемо по нашем комплексу K_n само по странама α_ν и $\alpha_{\nu+1}$ према шеми

$$\alpha_{\nu+1} \to \alpha_\nu' \to \alpha_{\nu+1}' \to \alpha_\nu'' \to \alpha_{\nu+1}'' \to \cdots,$$

при чему су сваке две суседне стране овог ланца инцидентне, онда се може, према [1], од сваког $\alpha_{\nu+1}$ доћи до сваког $\alpha_{\nu+1}$, јер је наш K_n силно свезан. Али ако је $\alpha_{\nu+1}^{(i)} \in C$, онда према горе казаном на овај начин можемо доћи увек само до ма ког елемента $\alpha_{\nu+1}^{(j)}$ који лежи у C, али никако до неког елемента који лежи у $R_{\nu+2} \setminus C$. Према томе није могуће да буде $kB = kC$, и остаје као једино могуће $kC > kB$, одакле, према а), следује опет (10).

Значи:

[9] *Ако уз претпоставке теореме* [7] *важи* $\nu + 2 = \mu$, *онда су* $R_{\nu+1}$ *и* $R_{\nu+2}$ *два најопсежнија антиланца у* K_n, *тј. такви да важи*

$$kR_{\nu+1} = kR_{\nu+2} > kA,$$

ако је A *ма који антиланац у* K_n *који није идентичан са* $R_{\nu+1}$ *или са* $R_{\nu+2}$.

И овај резултат ћемо предочити шематски:

$$\alpha_{-1} \underset{n_{0,-1}}{\overset{n_{-1,0}}{\rightleftarrows}} \alpha_0 \cdots \alpha_{\nu-1} \underset{n_{\nu,\nu-1}}{\overset{n_{\nu-1,\nu}}{\rightleftarrows}} \boxed{\alpha_\nu \underset{n_{\nu+1,\nu}}{\overset{n_{\nu,\nu+1}}{\rightleftarrows}} \alpha_{\nu+1}} \underset{n_{\nu+2,\nu+1}}{\overset{n_{\nu+1,\nu+2}}{\rightleftarrows}} \alpha_{\nu+2} \cdots \alpha_n \underset{n_{n+1,n}}{\overset{n_{n,n+1}}{\rightleftarrows}} \alpha_{n+1}$$

Сви бројеви $n_{i,i+1}$ за које важи $n_{i,i+1} > n_{i+1,i}$ су лево од уписаног правоугаоника, а сви бројеви $n_{j,j+1}$ за које важи $n_{j,j+1} < n_{j+1,j}$ леже десно од њега. У самом правоугаонику су означене стране из оних слојева комплекса K_n, од којих је сваки најопсежнији максимални антиланац скупа K_n.

Други специјални случај компекса K_n. Сада ћемо посматрати оне специјалне комплексе K_n код којих важе ови услови за свако $i \leqslant \nu$: *Сваки* елеменат $\alpha_i \in K_n$ i-те димензије има или $n_{i,i+1}$ или више од $n_{i,i+1}$ наследника α_{i+1} у K_n; а *сваки* елеменат $\alpha_{i+1} \in K_n$ $(i-1)$-ве димензије је потомак од $n_{i+1,i}$ или мање од $n_{i+1,i}$ елемената $\alpha_i \in K_n$; осим тога постоји *барем један* α_i који има више од $n_{i,i+1}$ наследника, или *барем један* елеменат α_{i+1} који је наследник од мање од $n_{i+1,i}$ елемената. Према томе код овог специјалног комплекса важи:

$$(11) \quad \begin{cases} n_{i,i+1}^{(j)} \geqslant n_{i,i+1} \quad (j = 1, 2, \cdots, m_i) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i \leqslant \nu) \\ n_{i+1,i}^{(k)} \leqslant n_{i+1,i} \quad (k = 1, 2, \cdots, m_{i+1}) \\ \text{и за свако } i \leqslant \nu \text{ за барем једну вредност } j \text{ или } k \\ \textit{не} \text{ важи знак једнакости.} \end{cases}$$

Ово ћемо претставити шемом

$$(*)\qquad \alpha_{-1} \underset{1}{\overset{n_{-1,0}}{\rightleftarrows}} \alpha_0 \underset{\leqslant n_{1,0}}{\overset{\geqslant n_{0,1}}{\rightleftarrows}} \alpha_1 \cdots \alpha_i \underset{\leqslant n_{i+1,i}}{\overset{\geqslant n_{i,i+1}}{\rightleftarrows}} \alpha_{i+1} \cdots$$

Претпоставимо сада да важи

$$(12)\qquad n_{i,i+1} \geqslant n_{i+1,i} \quad (i \leqslant \nu)$$

На исти начин као у претходном специјалном случају комплекса K_n, само служећи се место са [3] са теоремом [5], доказује се теорема:

Ако код комплекса K_n важи (11) и (12), онда се може наћи такав антиланац A^ν скупа K_n за који важи

$$A^\nu \cap R_\xi = \nu \quad (\xi \leqslant \nu + 1)$$

и

$$k A^\nu > k A,$$

где је A ма који антиланац у K_n који има барем један елеменат у скупу $\bigcup_\xi R_\xi$ $(\xi \leqslant \nu+1)$.

Скуп A^ν има, значи, *своје елементе у слојевима*

$$R_{\nu+2},\quad R_{\nu+3}, \cdots$$

А сада да претпоставимо да код нашег комплекса K_n важи

$$(13)\qquad \begin{cases} n_{i,i+1}{}^{(j)} \leqslant n_{i,i+1} \quad (j = 1, 2, \cdots, m_i) \\ n_{i+1,i}{}^{(k)} \geqslant n_{i+1,1} \quad (k = 1, 2, \cdots, m_{i+1}) \end{cases} (\mu \leqslant i \leqslant n-1)$$

а барем за једну вредност j или k, код сваког i између μ и $n-1$ *не* важи знак једнакости.

Осим тога нека је

$$(14)\qquad n_{i,i+1} \leqslant n_{i+1,i} \quad (\mu \leqslant i \leqslant n-1).$$

При томе је μ неки природан број.

Посматрајући обрнуто уређени скуп K_n^*, доказује се, на исти начин као горња теорема, следећа теорема:

Ако су код комплекса K_n задовољени услови (13) и (14), онда се може наћи такав антиланац A_μ од K_n за који важи

$$A_\mu \cap R_\xi = \nu \quad (\xi > \mu + 1)$$

и

$$k A_\mu > k A,$$

где је A ма који антиланац у K_n који има барем један елеменат у скупу $\bigcup_\xi R_\xi$ $(\xi > \mu + 1)$.

Скуп A_μ има, значи, *своје елементе у слојевима*

$$R_0, R_1, R_2, \cdots, R_{\mu+1}.$$

Од горњих двеју теорема следује теореми [7] аналогна теорема:

[7′] *Ако код комплекса K_n важе услови* (11), (12), (13) *и* (14), *онда најопсежнији антиланац у K_n има своје елементе само у слојевима*

$$(15) \qquad R_{\nu+2}, R_{\nu+3}, \cdots, R_{\mu+1}.$$

На аналоган начин као код претходног специјалног случаја комплекса K_n можемо и овде добијени резултат приказати графички уцртавањем једног правоугаоника у шему (*).

Разгледајмо опет два специјална случаја, наиме случај када се низ (15) састоји од једног самог члана, и случај када се тај низ састоји од два члана.

У првом случају је $\nu + 2 = \mu + 1$ или $\nu + 1 = \mu$. Тада *је слој $R_{\nu+2}$ најопсежнији антиланац у K_n.*

У другом случају је $\nu + 3 = \mu + 1$, или $\nu + 2 = \mu$. Разгледаћемо само случај када је

$$n_{\nu+1, \nu+2}^{(1)} = n_{\nu+1, \nu+2}^{(2)} = \cdots = n_{\nu+2, \nu+1}^{(1)} = n_{\nu+2, \nu+1}^{(2)} = \cdots$$

Онда је $k R_{\nu+2} = k R_{\nu+3}$. А доказује се, на исти начин као код претходног специјалног случаја комплекса K_n, *да су тада слојеви $R_{\nu+2}$ и $R_{\nu+3}$ два најопсежнија максимална антиланца у R_n.*

Глава II

ПРИМЕНА

I. ПРАВИЛНИ ПОЛИТОПИ

Добијене резултате ћемо применити сада на неке конкретне комплексе. Прво ћемо теорему [7] применити на тaкозване *правилне политопе,* код којих су очигледно услови те теореме задовољени.

Набројимо прво све правилне политопе (cf. [3]).

У $\mathbf{R}_1$ постоји један правилан политоп — дуж;

у $\mathbf{R}_2$ постоји њих безброј; то су сви правилни полигони;

у $\mathbf{R}_3$ има их пет: правилни тетраедар, коцка, октаедар, додекаедар и икозаедар;

у $\mathbf{R}_4$ има их шест: правилни симплекс Z_5, 8-страни правилни политоп Z_8, онда 16-страни Z_{16}, 24-страни Z_{24}, 120-страни Z_{120} и 600-страни правилни политоп Z_{600}.

У сваком $\mathbf{R}_n$, $n > 4$, постоје само три правилна политопа, и то: правилни симплекс A_n, n-димензионална коцка B_n, и правилни политоп C_n који је дуалан политопу B_n.

Правилни политопи A_n, B_n и C_n постоје и у $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ и $\mathbf{R}_4$. Тако је A_n у овим просторима равнострани троугао, правилни тетраедар односно Z_5; B_n је квадрат, коцка односно Z_{16}; C_n је квадрат, октаедар одн. Z_8.

Значи, поред правилних политопа A_n, B_n, C_n, $n > 1$, постоје још ови правилни политопи: правилни полигони; додекаедар, икозаедар; Z_{24}, Z_{120}, Z_{600}. Проблем одређивања скупа највећег могућег броја неинцидентних страна ћемо решити прве за ове политопе, а после за политопе A_n, B_n, C_n.

Иако је решење нашег проблема за правилне полигоне тривијалан, а за полиедре директна последица Euler-ове теореме, ипак ћемо наше резултате — ради илустрације — применити и на њих.

1. Правилни n-угаоник. $K_2(n, n)$. Из шеме

$$\alpha_{-1} \underset{1}{\overset{n}{\rightleftarrows}} \boxed{\alpha_0 \underset{2}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \alpha_1} \underset{n}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \alpha_2$$

следује тривијална истина да је скуп од највећег могућег броја неинцидентних „страна“ код правилних полигона скуп свих његових темена и скуп свих његових страна.

2. Додекаедар. K_3 (20, 30, 12). Шема

$$\alpha_{-1} \underset{1}{\overset{20}{\rightleftarrows}} \alpha_0 \underset{2}{\overset{3}{\rightleftarrows}} \boxed{\alpha_1} \underset{5}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \alpha_2 \underset{12}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \alpha_3$$

показује да код додекаедра ивице образују скуп највећег могућег броја неинцидентних страна.

3. Икозаедар. K_3 (12, 30, 20). Шема

$$\alpha_{-1} \overset{12}{\underset{1}{\rightleftarrows}} \alpha_0 \overset{5}{\underset{2}{\rightleftarrows}} \boxed{\alpha_1} \overset{2}{\underset{3}{\rightleftarrows}} \alpha_2 \overset{1}{\underset{20}{\rightleftarrows}} \alpha_3$$

даје исти резултат као код додекаедра: и код икозаедра ивице образују скуп највећег могућег броја његових неинцидентних страна.

4. Правилни политоп Z_{24}. K_4 (24, 96, 96, 24). Пошто је Z_{24} заграђен са 24 октаедара, добијамо одмах бројеве $n_{i+1,\,i}$. А помоћу теореме [4] одређују се онда и бројеви $n_{i,\,i+1}$. Добијамо шему:

$$\alpha_{-1} \overset{24}{\underset{1}{\rightleftarrows}} \alpha_0 \overset{8}{\underset{2}{\rightleftarrows}} \boxed{\alpha_1 \overset{3}{\underset{3}{\rightleftarrows}} \alpha_2} \overset{2}{\underset{8}{\rightleftarrows}} \alpha_3 \overset{1}{\underset{24}{\rightleftarrows}} \alpha_4$$

која показује:

Све једнодимензионалне као и све дводимензионалне стране политопа Z_{24} образују по један скуп од највећег могућег броја неинцидентних страна тог политопа.

5. Правилни политоп Z_{120}. K_4 (120, 720, 1200, 600). Из чињенице да је Z_{120} ограђен са 600 тетраедара, добићемо, као код Z_{24}, шему:

$$\alpha_{-1} \overset{120}{\underset{1}{\rightleftarrows}} \alpha_0 \overset{12}{\underset{2}{\rightleftarrows}} \alpha_1 \overset{5}{\underset{3}{\rightleftarrows}} \boxed{\alpha_2} \overset{2}{\underset{4}{\rightleftarrows}} \alpha_3 \overset{1}{\underset{600}{\rightleftarrows}} \alpha_4$$

Та показује:

Скуп највећег броја неинцидентних страна политопа Z_{120} је скуп свих његових дводимензионалних страна.

6. Правилни политоп Z_{600}. K_4 (600, 1200, 720, 120). Z_{600} је дуалан политопу Z_{120}. Ограђен је са 120 додекаедара. За њега се добија шема

$$\alpha_{-1} \underset{1}{\overset{600}{\rightleftarrows}} \alpha_0 \underset{2}{\overset{4}{\rightleftarrows}} \boxed{\alpha_1} \underset{5}{\overset{3}{\rightleftarrows}} \alpha_2 \underset{12}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \alpha_3 \underset{120}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \alpha_4$$

која казује:

Скуӣ највећеī моīућеī броја неинциденӣних сӣрана ӣолиӣоӣа Z_{600} *је скуӣ свих њеīових ивица.*

Остало је још да се разгледају правилни политопи A_n, B_n, C_n за $n \geqslant 3$.

6. Симплекси A_n. $K_n\left(\binom{n+1}{1}, \binom{n+2}{2}, \ldots, \binom{n+1}{n-1}, \binom{n+1}{n}\right)$.

За паран n и за непаран n добијамо ове шеме:

$$n = 2m$$

$$\alpha_{-1} \underset{1}{\overset{2m+1}{\rightleftarrows}} \alpha_0 \underset{2}{\overset{2m}{\rightleftarrows}} \alpha_1 \cdots \alpha_{m-2} \underset{m}{\overset{m+2}{\rightleftarrows}} \boxed{\alpha_{m-1} \underset{m+1}{\overset{m+1}{\rightleftarrows}} \alpha_m} \underset{m+2}{\overset{m}{\rightleftarrows}} \alpha_{m+1} \quad \alpha_{2m-1} \underset{2m+1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \alpha_{2m}$$

$$n = 2m + 1$$

$$\alpha_{-1} \underset{1}{\overset{2m+2}{\rightleftarrows}} \alpha_0 \underset{2}{\overset{2m+1}{\rightleftarrows}} \alpha_1 \cdots \alpha_{m-1} \underset{m+1}{\overset{m+2}{\rightleftarrows}} \boxed{\alpha_m} \underset{m+2}{\overset{m+1}{\rightleftarrows}} \alpha_{m+1} \cdots \alpha_{2m} \underset{2m+2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \alpha_{2m+1}$$

Од ових шема добили смо, резултате Ђ. Курепе (cf. [1] т. 2. 1, т. 3. 1):

Код симӣлекса A_n, *īде је* n *ӣаран број, ӣосӣоје два скуӣа образовани од највећеī моīућеī броја неинциденӣних сӣрана симӣлекса. То је скуӣ свих њеīових сӣрана димензије* $\frac{n}{2} - 1$ *и скуӣ свих њеīових сӣрана димензије* $\frac{n}{2}$. *Кардинални број сваkoī од ӣих скуӣова је* $\binom{n+1}{\frac{n}{2}}$.

А код симӣлекса A_n, *īде је* n *неӣаран, ӣосӣоји само један скуӣ неинциденӣних њеīових сӣрана са највећим моīућим кардиналним бројем. То је скуӣ свих сӣрана симӣлекса димензије* $\frac{n-1}{2}$. *Њеīов кардинални број је* $\binom{n+1}{\frac{n-1}{2}}$.

7. Правилни политоп B_n. Одговарајући комплекс K_n гласи

(16) $$K_n = K_n\left(2^n,\ 2^{n-1}\binom{n}{1}, \ldots,\ 2^3\binom{n}{3},\ 2^2\binom{n}{2},\ 2\binom{n}{1}\right).$$

Узимајући у обзир да је B_n заграђен политопима B_{n-1}, добијамо, користећи теорему [4], шему

$$\alpha_{-1} \underset{\xleftarrow[1]{}}{\xrightarrow{2^n}} \alpha_0 \underset{\xleftarrow[2\cdot 1]{}}{\xrightarrow{n}} \alpha_1 \underset{\xleftarrow[2\cdot 2]{}}{\xrightarrow{n-1}} \alpha_2 \cdots \alpha_{i-1} \underset{\xleftarrow[2\cdot i]{}}{\xrightarrow{n-i+1}} \alpha_i \cdots \alpha_{n-2} \underset{\xleftarrow[2(n-1)]{}}{\xrightarrow{2}} \alpha_{n-1} \underset{\xleftarrow[2n]{}}{\xrightarrow{1}} \alpha_n$$

Одредићемо такав цео број ν да важи

$$n-i+1 > 2i, \text{ ако } 0 < i \leqslant \nu$$

$$n-i+1 \leqslant 2i, \text{ ако } \quad i > \nu.$$

Ако $\frac{n+1}{3}$ није цео број, тј. ако је

(17) $$n \not\equiv 2 \pmod 3,$$
добијамо

$$\nu = \left[\frac{n+1}{3}\right].$$

А ако је $\frac{n+1}{3}$ цео број, тј. ако је

(18) $$n \equiv 2 \pmod 3,$$
онда добијамо

$$\nu = \frac{n+1}{3} - 1.$$

А сад да потражимо такав цео број μ да важи

$$n-i+1 < 2i, \text{ ако } \quad i \geqslant \mu$$

$$n-i+1 \geqslant 2i, \text{ ако } 0 < i < \mu.$$

За $n \not\equiv 2 \pmod 3$ добијамо

$$\mu = \left[\frac{n+1}{3}\right] + 1,$$

а за $n \equiv 2 \pmod 3$ добијамо

$$\mu = \frac{n+1}{3} + 1 = \frac{n+4}{3}.$$

У случају (17) је према томе $\nu+1=\mu$. На основу [8] следује одавде да је тражени антиланац идентичан са слојем R_μ.

У случају (18) важи $\nu+2=\mu$. Према теореми [9] постоје код нашег комплекса у случају (18) према томе два антиланца са максималним бројем елемената. То су слојеви $R_{\nu+1}$ и $R_{\nu+2}$.

Показали смо:

Код правилног политопа B_n постоји један или два скупа неинцидентних његових страна са максималним бројем елемената према томе да ли је $n \not\equiv 2 \pmod 3$ или $n \equiv 2 \pmod 3$. У првом случају тај скуп образују све стране политопа B_n димензије $\left[\frac{n+1}{3}\right]$. У другом случају један скуп образују све стране политопа B_n димензије $\frac{n-2}{3}$, а други скуп све стране димензије $\frac{n+1}{3}$. У оба случаја је кардинални број сваког скупа једнак $2^{\left[\frac{n+1}{3}\right]}\binom{n}{\left[\frac{n+1}{3}\right]}$.

8. Правилни политоп C_n. Овај политоп је дуалан политопу B_n. Зато за њега важи

$$K_n = K_n\left(2\binom{n}{1},\ 2^2\binom{n}{2},\ 2^3\binom{n}{3}, \ldots,\ 2^{n-1}\binom{n}{1},\ 2^n\right)$$

и шема

$$\alpha_{-1} \underset{1}{\overset{2n}{\rightleftarrows}} \alpha_0 \underset{2}{\overset{2(n-1)}{\rightleftarrows}} \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \underset{i+1}{\overset{2(n-i)}{\rightleftarrows}} \alpha_i \cdots \alpha_{n-2} \underset{n}{\overset{2\cdot 1}{\rightleftarrows}} \alpha_{n-1} \underset{2^n}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \alpha_n$$

Одредићемо онај цели број ν за који важи

$$2(n-i) > i+1, \text{ ако } 0 \leqslant i \leqslant \nu$$

$$2(n-i) \leqslant i+1, \text{ ако } n \geqslant i > \nu.$$

За (17) добијамо

$$\nu = \left[\frac{2n-1}{3}\right],$$

а за (18)

$$\nu = \frac{2n-1}{3} - 1.$$

За онај цели број μ за који важи

$$2(n-i) < i+1, \text{ ако } \quad i \geqslant \mu$$
$$2(n-i) \geqslant i+1, \text{ ако } 0 \leqslant i < \mu$$

добијамо у случају (17) вредност

$$\mu = \left[\frac{2n-1}{3}\right] + 1,$$

а у случају (18)

$$\mu = \frac{2n-1}{3} + 1.$$

Пошто је у случају (17) $\nu+1=\mu$, то у овом случају постоји један тражени антиланац. То је слој $R_{\nu+1}$ у скупу K_n.

У случају (12) је $\nu+2=\mu$. Према [9] постоје, значи, два антиланца тражених особина. То су слојеви $R_{\nu+1}$ и $R_{\nu+2}$ скупа K_n.

Према томе:

Код правилног политопа C_n постоји један или два скупа неинцидентних његових страна са највећим могућим кардиналним бројем према томе да ли важи (17) *или* (18). *У првом случају тај скуп образују све стране политопа C_n димензије $\left[\frac{2n-1}{3}\right]$, а у случају* (18) *један скуп образују све стране политопа C_n димензије $\frac{2n-4}{3}$, а други скуп све стране димензије $\frac{2n-1}{3}$. У оба случаја број елемената сваког скупа је*

$$kR_{\left[\frac{2n-1}{3}\right]} = 2^{\left[\frac{2n-1}{3}\right]} \binom{n}{\left[\frac{2n-1}{3}\right]}.$$

До истих резултата долазимо, разуме се, и применом закона дуалности код политопа B_n.

З а к љ у ч а к. Видимо да је решење постављеног проблема за случај правилних политопа сличан решењу проблема за случај симплекса. Наиме, *скуп који се састоји од највећег могућег броја неинцидентних страна ма којег правилног политопа, образују,* према изложеноме, *увек све оне стране тог политопа и с т е димензије чији број није мањи од броја свих страна тог политопа било које друге димензије.*

Код неких правилних политопа постоји ј е д а н такав скуп, а од неких д в а. Од добивених резултата може се лако утврдити:

1. да у просторима R_n *са* $n \equiv 1$ *и* $n \equiv 3$ *(mod 6) не постоје правилни политопи код којих би постојала д в а скупа са максималним бројем неинцидентних страна политопа;*

2. да у просторима R_n *са* $n \equiv 2$ *(mod 6) за све правилне политопе постоје по два таква скупа.*

II. СИМПЛЕКСНИ ПОЛИТОПИ У $\mathbf{R}_n$ СА $n+2$ ТЕМЕНА И ОПШТИ ПОЛИТОПИ У $\mathbf{R}_n$ СА $n+2$ ГРАНИЧНИХ ПРОСТОРА $\mathbf{R}_{n-1}$

Сада прелазимо на примену теореме [7']. Употребићемо је код симплексних политопа у $\mathbf{R}_n$ са $n+2$ темена, као и код њихових дуалних творевина — општих политопа у $\mathbf{R}_n$ са $n+2$ граничних простора $\mathbf{R}_{n-1}$.

Симплексним политопом, као што је познато, називамо сваки политоп чији гранични простори су симплекси. А *општим политопом* називамо сваки политоп у $\mathbf{R}_n$ код кога се у сваком његовом темену секу n његових граничних простора $\mathbf{R}_{n-1}$. Код парног n постоје у $\mathbf{R}_n$ само $\frac{n}{2}$, а код непарног n само $\frac{n-1}{2}$ у смислу изоморфизма међусобно различитих општих политопа са $n+2$ граничних простора $\mathbf{R}_{n-1}$, као и исто толико симплексних политопа са $n+2$ темена (cf. [3] стр. 28).

Да би показали да су услови теореме [7'] код ових политопа задовољени, потсетићемо се, на који се начин могу образовати ти политопи и израчунаћемо за њих бројеве $n_{i,\,i+1}{}^{(j)}$ и $n_{i+1,\,i}{}^{(k)}$. Довољно је урадити то само за опште политопе.

Сваком општем политопу у $\mathbf{R}_n$ са $n+2$ граничних простора $\mathbf{R}_{n-1}$ може се наћи један изоморфан политоп на тај начин, што се један симплекс $S(n+1)$ са $n+1$ темена пресече на погодан начин једном хиперравнином $\mathbf{R}_{n-1}$ на два политопа, и узме се један од њих (cf. [3] стр. 24—29).

Посматраћемо она два политопа, Π_q^p и Π_p^q, који се добијају пресецањем симплекса $S(n+1)$, који се налази у $\mathbf{R}_n$, једном изабраном хиперравнином тако да p темена симплекса $S(n+1)$ остану на једној страни те хиперравни, а $q=n+1-p$ темена на другој страни. Политоп Π_q^p нека је онај од њих, који се налази на оној страни хиперравни $\mathbf{R}_{n-1}$ на којој има p темена симплекса $S(n+1)$. Број граничних простора $\mathbf{R}_k$ политопа Π_q^p је једнак (cf. [3] стр. 15):

$$(19)\qquad \binom{p+q+1}{k+2}-\binom{p}{k+2}-\binom{q+1}{p+2}.$$

Лако је увидети да ово важи и онда, када се политоп Π_q^p добија пресецањем једног симплекса $S'(p+q)$, $p+q<n+1$, тако да на једној страни хиперравни $\mathbf{R}_{n-1}$ буде p темена (на тој страни је Π_q^p), а на другој q темена.

Користећи овај резултат, наћи ћемо бројеве $n_{i,\,i+1}{}^{(j)}$ и $n_{i+1,\,i}{}^{(v)}$ за наше опште политопе. Симплекс $S(n+1)$ сечемо са једним $\mathbf{R}_{n-1}$ и добијамо Π_q^p. Тиме смо пресекли и све оне стране (симплексе) симплекса $S(n+1)$ које нису мимоилазне или паралелне са $\mathbf{R}_{n-1}$. Нека једна од ових страна буде i-димензионални симплекс $s_i = s(p'+q')$. Она има $i+1 = p'+q'$ темена. Претпоставимо да је при пресецању са хиперравнином $\mathbf{R}_{n-1}$ остало p' његових темена на оној страни те хиперравни на којој је Π_q^p, а q' темена на другој страни. Онај пресечени део симплекса s_i, који се нализи на оној страни $\mathbf{R}_{n-1}$-а на којој има p' темена симплекса s_i, обележићемо са α_i. Да би добили број граничних простора α_{i-1} политопа α_i, ставићемо у (19) $p=p'$, $q=q'$, $k=p'+q'-2$. Узимајући за p' и q' све могуће вредности, добијамо тиме од (19) за $p' \neq 1$, $q' \neq 0$ број $p'+q'+1$, а за остале случајеве број $p'+q'$. Према томе, онај од два политопа, настала пресецањем симплекса s_i хиперравнином $\mathbf{R}_{n-1}$, који припада политопу Π_q^p, је ограђен са $i+1$ или са $i+2$ граничних страна α_{i-1} димензије $i-1$.

Према томе, за наше опште политопе важи $n_{i+1,\,i}{}^{(k)} = i+2$ или $i+3$.

И, најпосле, узимајући у обзир да је свака страна општег политопа опет општи политоп, налазимо да је $n_{i,\,i+1}{}^{(j)} = n-i$. Тиме смо за наше опште политопе добили шему:

$$\alpha_{-1} \underset{1}{\overset{m}{\rightleftarrows}} \alpha_0 \underset{2}{\overset{n}{\rightleftarrows}} \alpha_1 \underset{\substack{3\\4}}{\overset{n-1}{\rightleftarrows}} \alpha_2 \underset{\substack{4\\5}}{\overset{n-2}{\rightleftarrows}} \alpha_3 \cdots \alpha_i \underset{\substack{i+2\\i+3}}{\overset{n-i}{\rightleftarrows}} \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{n-2} \underset{\substack{n\\n+1}}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \alpha_{n-1} \underset{n+2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \alpha_n$$

Број m је број темена политопа.

Услов (11) теореме [7'] важи; треба само да ставимо $n_{i,\,i+1} = n-i$ и $n_{i+1,\,i} = i+3$. Да би видели у којим границама важи (12), потражићемо онај највећи природни број ν за који важи

$$n-i \geqslant i+3, \quad (0 < i \leqslant \nu)$$

Одавде добијамо

$$\nu = \frac{n}{2} - 2, \quad \text{за } n \equiv 0 \pmod 2)$$

$$\nu = \frac{n-3}{2}, \quad \text{за } n \equiv 1 \pmod 2).$$

Важи и услов (13); треба само ставити опет $n_{i,\,i+1} = n-i$ и $n_{i+1,\,i} = i+2$. Да би утврдили за који μ важи (14), треба наћи такав најмањи природни број μ да важи

$$i+2 \geqslant n-i, \quad (\mu \leqslant i)$$

Добијамо

$$\mu = \frac{n}{2} - 1, \quad \text{за } n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)$$

$$\mu = \frac{n-1}{2}, \quad \text{за } n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2).$$

Према томе, низ (15) састоји се за $n \equiv 0$ (mod 2) само од слоја $R_{\frac{n}{2}}$, а за $n \equiv 1$ (mod 2) само од слоја $R_{\frac{n+1}{2}}$.

Доказали смо:

Код сваког општег политопа у $\mathbf{R}_n$ *са* $n+2$ *граничних простора* $\mathbf{R}_{n-1}$ *постоји један једини скуп највећег могућег броја његових неинцидентних страна. То је скуп свих његових* $\left[\frac{n-1}{2}\right]$*-димензионалних страна.*

Код дуалног политопа — симплексног политопа у $\mathbf{R}_n$ са $n+2$ темена — одговарају $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$-димензионалним странама општег политопа стране димензије $n - \left(\frac{n}{2} - 1\right) - 1 = \frac{n}{2}$, а $\frac{n-1}{2}$-димензионалним странама одговарају стране димензије $n - \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$. Према томе:

Код симплексних политопа у $\mathbf{R}_n$ *са* $n+2$ *темена постоји само један скуп највећег могућег броја неинцидентних страна политопа. То је скуп свих његових* $\left[\frac{n}{2}\right]$*-димензионалних страна.*

Показали смо тиме да је и код овде разматраних политопа скуп највећег могућег броја неинцидентних страна политопа *скуп свих страна једне исте* димензије.

Завршне примедбе

Политопи, посматрани у глави II, су неки примери таквих политопа код којих је могуће применом теорема [7] и [7'] одредити онај скуп неинцидентних страна политопа који има највећи могући број елемената. Осим тога као резултат смо добили увек један или два скупа свих страна једне исте димензије.

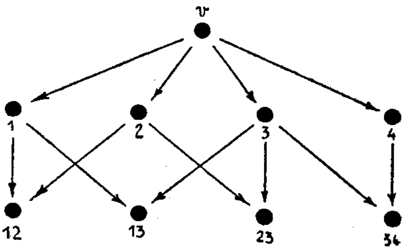
Могли би наћи, разуме се, још примера код којих поменуте теореме воде до крајњег резултата.

Али већ код тако једноставног комплекса као што је симплексни димензионално-хомогени политоп у $\mathbf{R}_n$ $(n > 4)$ који није симплекс, теореме [7] и [7'] не воде до крајњег циља. У овом случају имамо наиме шему

$$\alpha_0 \underset{2}{\overset{\geqslant n}{\rightleftarrows}} \alpha_1 \underset{3}{\overset{\geqslant n-1}{\rightleftarrows}} \alpha_2 \underset{4}{\overset{\geqslant n-2}{\rightleftarrows}} \alpha_3 \cdots \alpha_i \underset{i+2}{\overset{\geqslant n-i}{\rightleftarrows}} \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{n-3} \underset{n-1}{\overset{\geqslant 3}{\rightleftarrows}} \alpha_{n-2} \underset{n}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \alpha_{n-1}$$

из које се добија само то, да у траженом скупу фигурирају само стране димензије $\geqslant \left[\frac{n}{2}\right] - 1$.

Треба нагласити да теорема „*да је скуп највећег могућег броја неинцидентних страна једног комплекса скуп (или скупови) свих његових страна једне исте, одређене димензије*“ није тачна у општем случају — као што би можда могло да се помисли на основу резултата у глави II. Тако на пр. код комплекса чији су елементи празни скуп v, тачке (1), (2), (3), (4) и дужи (12), (13), (23) и (34), а чије уређење је дато нацртаном шемом, је скуп {(12), (13), (23), (4)} један скуп највећег могућег броја неупоредивих елемената, а елементи овог скупа немају исту димензију.



Остаје отворено интересантно питање, који су то све комплекси код којих горе поменута теорема важи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Kurepa, *Sur les polytopes*, Весник Друштва математичара и физичара НР Србије, Београд, 1953.

[2] Georges Kurepa, *Sur les correspondances multivoques*, Comtes rendus, T. 237, 1953, p. 1133—1135.

[3] H. P. Schoute, *Mehrdimensionale Geometrie*, Bd. II, Leipzig, 1905.

[4] П. С. Александров, *Комбинаторная топология*, Москва, 1947.

Jože Ulčar

ÜBER DIE NICHTINZIDENTEN SEITEN EINIGER POLYTOPE

(Zusammenfassung)

G. Kurepa hat das Problem der Bestimmung der Menge von der grössten möglichen Anzahl von nichtinzidenten Seiten eines Simplex aufgestellt und gelöst (cf. [1], [2]). In dieser Arbeit werden seine Resultate für einige Polytope generalisiert.

Es soll ein Komplex K_n gegeben werden. Seine Elemente seien konvexe Polytope von der Dimensionen i $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$. Jede i-dimensionale Seite des K_n soll mit $n_{i, i+1}$ oder mit mehr als $n_{i, i+1}$ $(i+1)$-dimensionalen Seiten des K_n inzidieren; und jede $(i+1)$-dimensionale Seite des K_n soll mit $n_{i+1, i}$ oder mit weniger als $n_{i+1, i}$ i-dimensionalen Seiten inzidieren; ausserdem soll für jedes i wenigstens eine i-dimensionale Seite, die mit mehr als $n_{i, i+1}$ $(i+1)$-dimensionalen Seiten des K_n inzidiert, existieren, oder wenigstens eine $(i+1)$-dimensionale Seite, die mit weniger als $n_{i+1, i}$ i-dimensionalen Seiten des K_n inzidiert. Es soll dabei

$$n_{i, i+1} \geqslant n_{i+1, i} \quad (i \leqslant \nu), \qquad n_{i, i+1} \leqslant n_{i+1, i} \quad (\mu \leqslant i \leqslant n-1)$$

sein.

Es wird dann bewiesen, dass *in diesem Falle die Menge (oder Mengen)* M *von der grössten möglichen Mächtigkeit, deren Elemente voneinander nichtinzidente Seiten des Komplexes K_n sind, nur Seiten von der Dimensionen $\nu+1$, $\nu+2$, $\nu+3, \ldots$, μ als Elemente enthält.*

Wenn speziell K_n ein belibiges reguläres Polytop ist, folgt daraus und noch einigen Überlegungen folgendes:

Die Menge M *von der grössten möglichen Anzahl voneinander nichtinzidenten Seiten eines beliebigen regulären Polytopes besteht immer aus aller jenen Seiten dieses Polytopes von einer und derselben Dimension, deren Anzahl nicht geringer ist als die Anzahl aller Seiten dieses Polytopes von einer und derselben, aber beliebigen Dimension.* Bei einigen regulären Polytopen existiert eine solche Menge, bei andern zwei. In euklidischen Räumen R_n mit $n \equiv 1$ und $n \equiv 3$ (mod 6) existiert bei jedem regulären Polytop nur eine, in Räumen R_n mit $n \equiv 2$ (mod 6) existieren immer je zwei Mengen M, in übrigen Fällen existiern bei einigen regulären Polytopen je eine und bei andern je zwei solche Mengen.

Für die einzelnen regulären Polytope im R_n, $n > 3$ gilt folgendes:

1. Im R_4 gibt es 6 reguläre Polytope Z_n: Z_5 (der Simplex) Z_8, Z_{16}, Z_{24}, Z_{120} und Z_{600}, wo der Index bei Z die Anzahl der das Polytop begrenzenden Grenzräume bedeutet. Bei Z_5, Z_8, Z_{16}, Z_{24} bestehen je zwei Mengen M: die eine ist die Menge aller eindimensionalen, die andere die Menge aller zweidimensionalen Seiten des Polytopes; bei Z_{120} und Z_{600} besteht nur je eine Menge M: bei Z_{120} ist dies die Menge aller seiner zweidimensionalen, bei Z_{600} die Menge aller seiner eindimensionalen Seiten.

2. Im R_n, $n > 4$ existieren drei reguläre Polytope: der Simplex A_n, das Masspolytop B_n und das dem Masspolytop reziprek verwandte Polytop C_n.

Für die Polytope A_n sind die Resultate von G. Kurepa (cf. [1] t. 2. 1, т. 3. 1), wiedergefunden.

Für die Polytope B_n und C_n existiert eine oder zwei Mengen M je nachdem $n \not\equiv 2$ (mod 3) oder $n \equiv 2$ (mod 3) ist.

Bei B_n ist das im ersten Fall die Menge aller $\left[\frac{n+1}{3}\right]$-dimensionalen, im zweiten Fall die Menge aller $\frac{n-2}{3}$-dimensionalen und die Menge aller $\frac{n+1}{3}$-dimensionalen Seiten. Die Mächtigkeit einer jeden von diesen Mengen ist:

$$2^{\left[\frac{n+1}{3}\right]}\binom{n}{\left[\frac{n+1}{3}\right]}.$$

Bei C_n ist das im ersten Falle die Menge aller seiner $\left[\frac{2n-1}{3}\right]$-dimensionalen Seiten, im zweiten die Menge aller seiner $\frac{2n-4}{3}$-und die Menge aller $\frac{2n-1}{3}$-dimensionalen Seiten. Die Mächtigkeit einer jeden von diesen Mengen ist:

$$2^{\left[\frac{2n-1}{3}\right]}\binom{n}{\left[\frac{2n-1}{3}\right]}.$$

Für ein sÿmpliziales Polytop im R_n mit $n+2$ Ecken und für ein allgemeines Polytop im R_n mit $n+2$ Grenzräumen R_{n-1} als K_n bekommt man:

Bei jedem symplizialen Polytop im R_n mit $n+2$ Ecken gibt es nur eine Menge M. *Das ist die Menge aller $\left[\frac{n}{2}\right]$-dimensionalen Seiten des Polytopes.*

Bei jedem allgemeinen Polytop im R_n mit $n+2$ Grenzräumen R_{n-1} gibt es auch nur eine Menge M. *Das ist die Menge aller $\left[\frac{n-1}{2}\right]$-dimensionalen Seiten des Polytopes.*

Bei diesen Beispielen ist die gesuchte Menge M eine Menge von Seiten von einer und derselben Dimension. Das gilt natürlich nicht im allgemeinen. Es würde interressant sein, zu untersuchen, für welche Komplexe diese Aussage richtig ist.

ERRATA

Стр. 22, ред 7 и 16:	стоји	$\mathbf{R}_n$ *са*	треба	$\mathbf{R}_n$ $(n>2)$ *са*
Seite 25, Reihe 14 und 17:	statt	R_n *mit*	lies	R_n $(n>2)$ *mit*