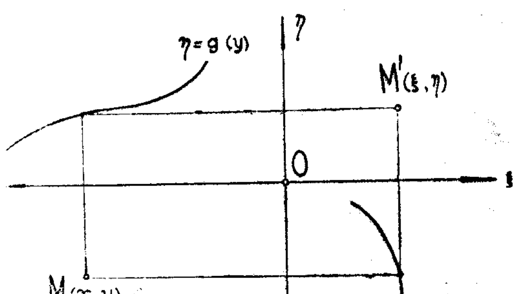
ЕДНА ГРАФИЧКА МЕТОДА ЗА РЕШАВАЊЕ НА РАВЕНКИТЕ

Јоже Улчар

Графичките методи сè повеќе се негуваат во математиката. Меѓу нив важно место заземаат разни начини за графичко определување приближните вредности на реалните корени на разни типови равенки. Ние даваме тука една метода која се заснива на едно специјално пресликување на рамнината сама во себе. Во т. I ќе го разгледаме тоа пресликување и ќе покажеме како тоа во извесни случаи може полезно да се исползува за цртање на криви. Во т. II и III ќе го приложиме изученото пресликување за графчко решавање на равенки со една непозната и на системи равенки со две непознати.

I. Пресликувањето $\xi = f(x)$, $\eta = g(y)$

1. Во рамнината избираме две правоагли картезични координатни системи Oxy и $O\xi\eta$, при кои координатните оски совпаднуваат, но имаат спротивни смерови — како што е покажано на сл. 1.



Сл. 1.

Потоа избираме една произволна (еднозначна и непрекината) функција $f(x)$, дефинирана во интервалот $a \leqslant x \leqslant b$, и една функција $g(y)$, дефинирана за $c \leqslant y \leqslant d$. За точките M што лежат во правоаголникот П, заграден со правите $x=a$, $y=b$, $y=c$, $y=d$, определуваме сега со помошта на функциите $f(x)$ и $g(y)$ едно еднозначно пресликување π. На секоја точка $M(x, y)$ од тој правоаголник П нека ѝ одговара при пресликувањето π точката $M'(\xi, \eta)$ чии што координати ξ, η по однос на системата $O\xi\eta$ се дадени со

$$(1) \qquad \xi = f(x), \quad \eta = g(y).$$

При ова пресликување π точките M од Π се пресликуваат во точките M' на некоја област Π' од рамнината. Дефинираното пресликување π е *еднозначно*, т. е. на секоја точка M од Π ѝ одговара една, но и една сама точка M' од Π'.

За да можеме едноставно графички да ги определиме сликите M' од точката M, при пресликувањето π, го нацртуваме во координатната система $Ox\xi$ графикот на функцијата $\xi = f(x)$, а во системата $Oy\eta$ графикот на функцијата $\eta = g(y)$ (види сл. 1). — Нека е зададена сега една точка M во Π. Го нацртуваме правоаголникот на кој страните му се паралелни со оските на избраните координатни системи, а а од темињата едното му е во M, а по едно му лежи на нацртаните графици на функциите $\xi = f(x)$ и $\eta = g(x)$. Она теме на овој правоаголник, што е спротивно на M, е сликата M' од M при пресликувањето π — што е евидентно од сл. 1.

Јасно е дека на ист начин може да се определи и оригиналната точка M ако е зададена сликата M'. Правоаголникот почнуваме да го цртаме сега од точката M', повлекувајќи низ неа прави паралелни со координатните оски до пресеците со нацртаните криви итн. Но, за разлика од предодниот случај, сега можеме да добиеме не само еден ваков правоаголник, ако е зададено темето M', туку и повеќе. Значи, една иста точка M' од Π' може да биде при пресликувањето π слика не само на една, ами и на повеќе точки од Π. Еднозначното пресликување π, значи, не е *обратно*-еднозначно. Само ако функциите $f(x)$ и $g(y)$ се монотони, има при пресликувањето π секоја слика M' само еден оригинал. Спрема тоа, во овој специјален случај пресликувањето π е обратно-еднозначно.

Ако функциите $f(x)$ и $g(y)$ се линеарни, пресликувањето π е едно специјално афино пресликување.

2. Ако над точките на една крива K која лежи во Π го извршиме пресликувањето π, добиваме во Π' една крива K' — слика, при π, од кривата K. Тоа може во извесни случаи и практично да се исползува; на пр. за нацртување на некоја крива зададена со равенката $F(\xi, \eta) = 0$, ако ги знаеме графиците на функциите $f(x)$ и $g(y)$, и ако можеме лесно да ја нацртаме кривата $F(f(x), g(y)) = 0$. Треба само точките (практично само извесен број точки) на кривата $F(f(x), g(y)) = 0$ да ги пресликаме — при нашето пресликување π — по горе изложениот метод. Пресликаните точки лежат на бараната крива.

Пример. Ќе го илустрираме горното со овој пример: Да се конструира по горната метода елипсата

$$(2) \qquad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Решение. Равенката (2) ја пишуваме во вид

$$\xi^2 + \frac{a^2}{b^2}\eta^2 = a^2, \tag{2'}$$

и ставуваме

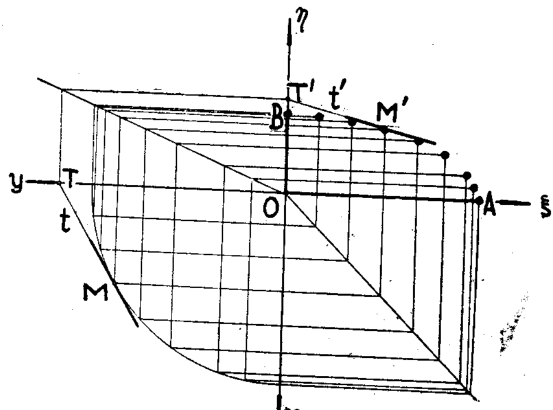
$$\xi = x, \quad \frac{a}{b}\eta = y. \tag{3}$$

При пресликувањето π избираме $f(x) \equiv x$, $g(y) \equiv \frac{b}{a}y$. Од (2′) и (3) ги елиминираме ξ и η, па добиваме

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{4}$$

Елипсата (2) е, значи, при избраното пресликување π, слика на кругот (4).

На сл. 2 се обележени полуоските OA и OB на елипсата. Над OA како страна нацртуваме квадрат, а над OB како една страна — правоаголник чија подолга страна е еднаква на OA (види сл. 2). Оние дијагонали на овие две нацртани фигури што минуваат низ O се графици на избраните функции $f(x)$ и $g(y)$. Заради поголема прегледност на сл. 2 нацртани се — како слики на точки од кругот со радиус OA и центар во O — само извесен број оние точки на елипсата што лежат во I квадрант на системата $O\xi\eta$.

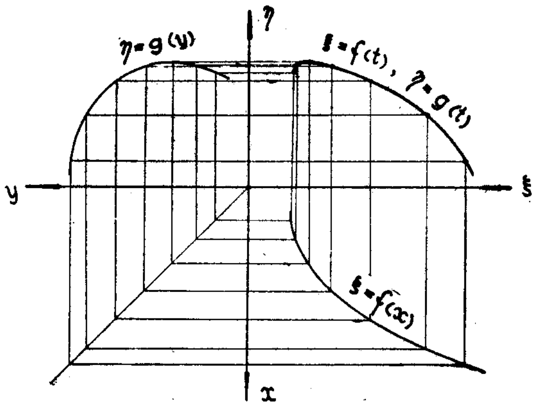


Сл. 2.

Бидејќи во нашиот случај функциите $f(x)$ и $g(y)$ се линеарни, тоа π е едно афино пресликување. А при афините пресликувања тангентите на било која крива преjдуваат во тангенти на пресликаната крива. Тангентата t на кругот (4) во некоја негова точка M преjдува, значи, при пресликувањето π, во тангентата t' на елипсата (2) во точката M' која е слика од M. Бидејки t' минува низ M', тоа за да ја конструираме тангентата t' ни е нужна уште една нејзина точка. На сл. 2 тангентата t' е конструирана со помошта на сликати T' од пресекот T на тангентата t и y-оската.

3. Пресликувањето π можеме да го ползуваме и за цртање, точка по точка, на криви зададени со параметарски равенки. — Нека ни се зададени равенките

$$\xi = f(t), \quad \eta = g(t) \tag{5}$$



Сл. 3.

на една крива. Точките од оваа крива се сликите при пресликувањето π на точките од првата $x=y$. Навистина елиминирајќи ги x и y од (1) и од параметарските равенки $x=t$, $y=t$ на оваа права, ги добиваме равенките (5).

На сл. 3 е покажано како го добиваме графикот на (5), ако ни се дадени графиците на $f(x)$ и $g(y)$.

II. Графичко решавање на равенката $F(f(x), g(y))=0$

За да ги најдеме графички реалните корени на равенката

$$F(f(x), g(x))=0, \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{6}$$

ќе го користиме пак пресликувањето π, дефинирано со (1). Функциите $f(x)$ и $g(x)$ нека бидат **монотони**.

Методата што ќе ја изложиме е згодна тогаш кога графиците на $f(x)$, $g(x)$ и $F(\xi, \eta)=0$ лесно се цртаат.

Ги нацртуваме кривите $\xi=f(x)$ и $\eta=g(y)$ во системата $Ox\xi$ одн. $Oy\eta$, а во системата $O\xi\eta$ кривата

$$F(\xi, \eta)=0. \tag{7}$$

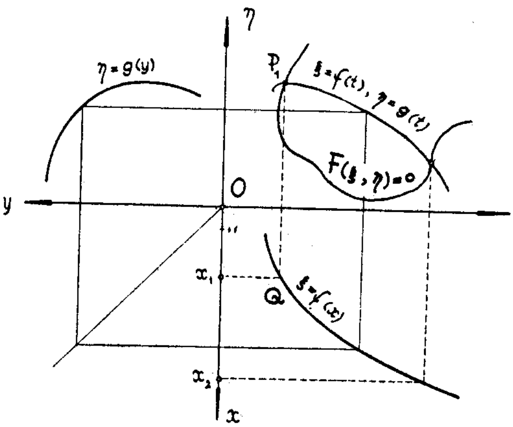
Потоа, по мотодот од I, 3 — пресликувајќи ја, при π, правата $x=y$ — ја нацртуваме кривата дадена со

$$\xi=f(t), \quad \eta=g(t); \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{8}$$

Нека е $P_1(\xi_1, \eta_1)$ една пресечна точка на кривите (7) и (8). Тогаш постои еден $t=t_1$ за кој важи $\xi_1=f(t_1)$, $\eta_1=g(t_1)$. Бидејќи P_1 лежи на кривата (7), е $F(\xi_1, \eta_1)=0$ или $F(f(t_1), g(t_1))=0$. Значи $x=x_1=t_1$ е еден корен на равенката (6).

Практично ја прочитуваме вредноста x_1, значи, на тој начии што од P_1 повлекуваме права паралелна со η-оската до пресекот Q со кривата $\xi = f(x)$, а од Q паралела со ξ-оската; оваа паралела ја сече x-оската во точката чија опсциса x е x_1. Корените ги прочитуваме, спрема тоа, на x-оската (види сл. 4).

Овој метод е нарочно згоден кога функциите $f(x)$ и $g(x)$ се линеарни. Тогаш кривата (8) е права и лесно се нацртува.



Сл. 4.

Забелешка. Сето горно е во сила и тогаш кога функцијата $g(x)$ не е монотона, но $f(x)$ да е монотона.

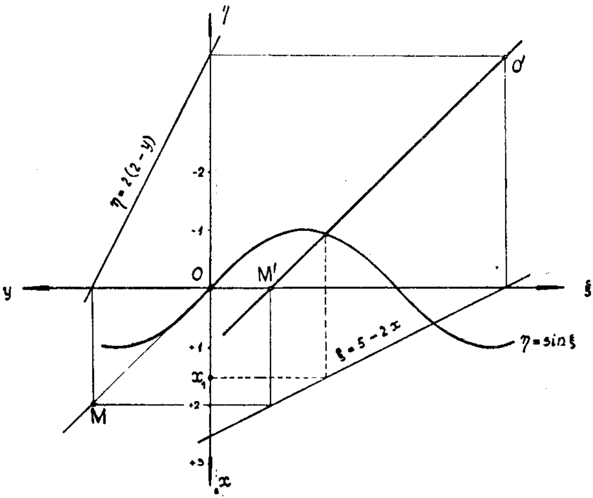
Ако е $g(x)$ монотона, а $f(x)$ не е монотона, тогаш корените можеме да ги прочитуваме на y-оската. Во овој случај теглиме од P_1 паралела со ξ-оската до пресекот со кривата $\eta = g(y)$, а од овој пресек паралела со η-оската; оваа паралела ја сече y-оската — на која е обележена скала — во точката на која во таа скала ѝ припаѓа број кој е еден корен на равенката (6).

А ако и $f(x)$ и $g(x)$ не се монотони, тогаш опишаната метода може и да не ни даде корен на равенката (6). Во овој случај, за да ги најдеме корените, треба да ги нацртаме сите страни на правоаголниците чие едно теме е во пресекот P_1, нему соседните темиња на кривите $\xi = f(x)$ и $\eta = g(y)$, а страните на кои се паралелни со координатните оски. Помеѓу сите овие правоаголници ги избираме само оние од нив, при кои темињата што се спротивни на P_1 лежат на правата $x = y$. За секој пресек P_1 постои барем еден таков правоаголник. Точките во кои оние страни на овие правоаголници што не минуваат низ P_1 ја сечат x-оската, ни ги определуваат бараните корени: тоа се апсцисите на овие точки (во Oxy системата).

Пример. Како пример ќе ја решиме по оваа метода равенката

$$\sin(5 - 2x) = 2(2 - x). \tag{9}$$

Решение. Ги нацртуваме правите $\xi = 5 - 2x$ и $\eta = 2(2 - y)$, и кривата $\eta = \sin\xi$, во системите $Ox\xi$, $Oy\eta$ одн. $O\xi\eta$ (види сл. 5). Нацртаните прави се графици на функциите $\xi = f(x)$ и $\eta = g(y)$ при нашето пресликување π. Сликата при ова пресликување π на првата $x = y$ ја добиваме, ако ги конструираме сликите на било кои две токчи од последната. На сл. 5 се нацртани сликите O' и M' од O и M. Секој пресек на пра-



Сл. 5.

вата $O'M'$ со синусоидата $\eta = \sin \xi$ определува по еден корен од (9). Цртежот покажува дека имаме само еден пресек, затоа равенката (9) има еден сам реален корен $x = x_1$. Тој лежи меѓу 1,5 и 1,6.

III. Графичко решавање на системата равенки $\Phi(f(x), g(x)) = 0$, $F(x, y) = 0$

Со помошта на пресликувањето π ќе ја решаваме графички и системата равенки од видот

(10) $\Phi(f(x), g(y)) = 0, \quad F(x, y) = 0; \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$

каде што $f(x)$ и $g(y)$ се произволни монотони функции.

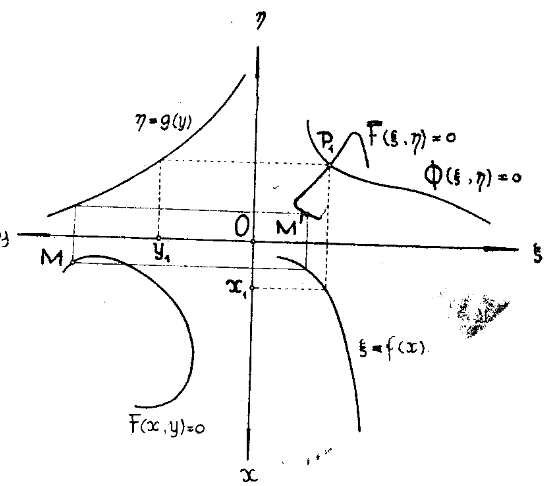
Ги избираме координатните системи како во I, 1 и пресликувањето π дефинирано со (1). Ги нацртуваме кривите $\xi = f(x)$, $\eta = g(y)$ во системта $Ox\xi$ одн. $Oy\eta$, а во системата $O\xi\eta$ кривата

(11) $$\Phi(\xi, \eta) = 0.$$

Потоа ја нацртуваме, точка по точка, сликата од кривата $F(x, y) = 0$ при пресликувањето π. Равенката на пресликаната крива нека е

(12) $$\bar{F}(\xi, \eta) = 0.$$

Нека е P_1 една пресечна точка на кривите (11) и (12). Нацртуваме правоаголник чие едно теме е P_1, соседните темиња да му лежат на кривите $\xi = f(x)$ и $\eta = g(y)$, а страните да му се паралелни со координатните оски. Оние страни од овој правоаголник кои не минуваат низ P_1 ги сечат x- и y-оската во точките (x_1, o) и (o, y_1). Едно решение на системата (10) е $x = x_1, y = y_1$. Навистина, ако P_1 има координати ξ_1, η_1, важи $\Phi(\xi_1, \eta_1) = 0$. А постои еден x_1 и еден y_1 за кој е $\xi_1 = f(x_1)$ одн. $\eta_1 = g(y_1)$. P_1 е, значи, слика на точката $P(x_1, y_1)$ од системата Oxy при пресликувањето π. А бидејќи P_1 е еден пресек на кривите (11) и (12), тоа P е еден пресек на кривите (10). Важи, спрема тоа:



Сл. 6.

$$\Phi(f(x_1), g(y_1)) = 0, \quad F(x_1, y_1) = 0,$$

т. е. двојката броеви $x = x_1$, $y = y_1$ претставува навистина едно решение на системата (10).

Методот е нарочно згоден кога $f(x)$, $g(y)$ и $F(x, y)$ се линеарни; тогаш кривата (12) е права.

З а б е л е ш к а. Ако функциите $f(x)$ и $g(y)$ не се монотони, тогаш за да ги добиеме решенијата од (10), од сите можни горе споменати правоаголници со едно теме во P_1 треба да ги избираме само оние, при кои темињата што се спротивни на P_1 им лежат на кривата $F(x, y) = 0$. При секој пресек P_1 постои барем еден ваков правоаголник. Секој пресек F_1 на кривите (11) и (12) определува, значи, барем едно решение $x = x_1$, $y = y_1$ на системата (10).

П р и м е р. За илустрација ќе ја решиме по оваа метода системата равенки

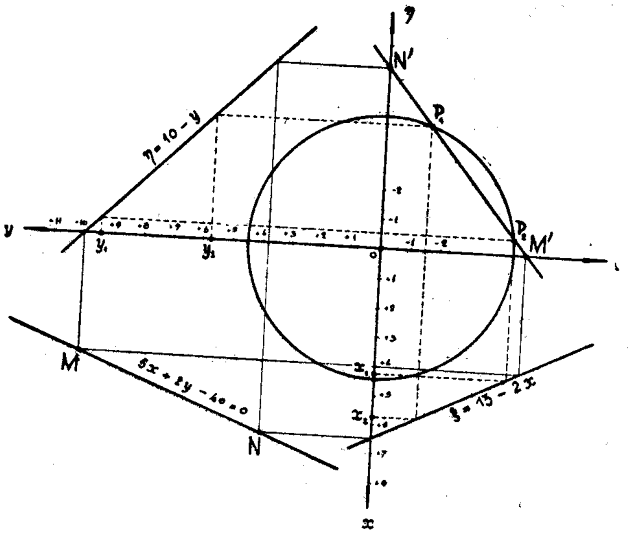
$$(13) \quad \begin{aligned} &(13 - 2x)^2 + (10 - y)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\ &5x + 2y - 40 = 0, \end{aligned}$$

Решение. Ги нацртуваме (види сл. 7) правите

$$\xi = 13 - 2x, \quad \eta = 10 - y$$

и правата

$$5x + 2y - 40 = 0.$$



Сл. 7.

Последната права ја пресликуваме по методата од I, 1. Нејзината слика е определена на сл. 7 со сликите M', N' од M, N. Нејзините пресечени точки P_1 и P_2 со кругот $\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2$ определуваат две (приближни) решенија на системата (13), имено

(14) $$x_1 \approx 4{,}2,\ y_1 \approx 9{,}5 \quad \text{и} \quad x_2 \approx 5{,}7,\ y_2 \approx 5{,}7.$$

Zusammenfassung

EINE GRAPHISCHE BESTIMMUNG VON GLEICHUNGSLÖSUNGEN

Jože Ulčar

I. Man nimmt zwei kartesische Koordinatensysteme Oxy und $O\xi\eta$, die in einer solchen gegenseitigen Lage sind, wie es die Fig. 1. zeigt. Es wird dann eine eindeutige, aber nicht ein-eindeutige Abbildung ω: $M(x,y) \rightarrow M'(\xi, \eta)$ mit (1) difiniert. Dieselbe Fig. zeigt, wie man aus M sein Bild M' bekommen kann. Das Bild von der Geraden $x=y$ ist eine Kurve, die mit den Parametergleichungen (5) gegeben ist (siehe Fig. 3).

II. Die Gleichung (6), wo $f(x)$ und $g(x)$ beliebige monotone Funktionen sind, wird graphisch gelöst, indem man die Kurven (7) und (8) aufzeichnet, und die Abszissen der Urbilder, bei der Abbildung ω, derjenigen Punkte, in welchen diese Kurven geschnitten werden, abliest (Fig. 4). Diese Abszissen sind die reellen Wurzeln der Gleichung (6).

Wenn aber die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ nicht monoton sind, muß man, um Lösungen von (6) zu bekommen, nur die Abszissen derjenigen Urbilder eines jeden Schnittpunktes der Kurven (7) und (8) nehmen, die auf der Geraden $x=y$ liegen.

Die Methode ist besonders günstig, wenn die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ linear sind, wie es z.B. die Gleichung (9) und seine graphische Lösung auf dem Bd. 5 zeigt.

III. Das Gleichungssystem (10), wo $f(x)$ und $g(y)$ beliebige monotone Funktionen sind, kann man graphisch folgendermaßen lösen. Man zeichne die Kurve (11) und das Bild, bei der Abb. ω, der Kurve $F(x,y)=0$; die Gleichung dieses Bildes sei (12). Die Abszisse x_1 und die Ordinate y_1 des Urbildes eines jeden Schnittpunktes von diesen gezeichneten Kurven sind eine Lösung $x=x_1$, $y=y_1$ des Gleichungssystems (10) (Fig. 6).

Wenn die Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ nicht monoton sind, muß man, um Lösungen zu bekommen, nur die Abszissen und Ordinaten derjenigen Urbilder der Schnittpunkte der Kurven (12) und (13) nehmen, die auf der Kurve $F(x,y)=0$ liegen.

Die Methode ist besonders günstig, wenn $f(x)$, $g(y)$ und $F(x,y)$ linear sind, da dann (12) eine Gerade ist. Das Gleichungssystem (13) ist ein Beispiel dafür. Seine Lösungen (14) kann man auf dem Bd. 7 ablesen.