О ЈЕДНОДИМЕНЗИОНАЛНИМ КОМПЛЕКСИМА

ЈОЖЕ УЛЧАР

У овом раду дајемо решење проблема одређивања најопсежнијих скупова, чији елементи су међусобно неинцидентне стране произвољно датог једнодимензионалног комплекса. Преблем је за општи случај поставио Ђ. Курепа и решио га за симплексе (в. [2]). Наш рад се надовезује на једну ранију нашу расправу (в. [6]), у којој је поменути проблем решен за неке специјалне комплексе, чији специјални случајеви су, међу другима, сви правилни политопи, симплексни политопи у n-димензионалном Еуклидовом простору са $n+2$ темена, као и њихове дуалне творевине.

1. Основне дефиниције и ставови

Нека је S_1 један скоро пребројив скуп чији елементи су отворене дужи (тј. без крајних тачака) које леже у тродимензионалном Еуклидовом простору R_3, а немају заједничких тачака, S_0 нека је скуп крајних тачака дужи из S_1; а S_0' нека је једна скоро пребројива множина тачака из R_3 које не леже на дужима из S_1. Онда се унија $K = S_1 \cup S_0 \cup S_0'$, $S_1 \neq v$, зове *једнодимензионални комплекс.* За елементе скупова S_0 и S_0' казујемо да су нулдимензионални, а за елементе скупа S_1 — да су једнодимензионални елементи или стране комплекса K. Ако је множина K коначна, онда и за комплекс K кажемо да је *коначан*, а ако је она пребројива, онда ћемо за комплекс K казати да је *бесконачан.* Ако је множина S_0' празна, комплекс K називамо *димензионално-хомоген.* За нас су интересантни баш ови последњи, и то са коначним бројем елемената.

Ако спојимо елементе једног коначног једнодимензионално-хомогеног комплекса, добијамо једну полигоналну линију која лежи у R_3. Можемо казати, према томе, да се коначни једнодимензионално-хомогени комплекс добија разбијањем полигоналне линије на отворене дужи и њихове крајне тачке, ако при томе те отворене дужи немају заједничких тачака.

Свака крива која је хомеоморфна некој полигоналној линији зове се *елементарна крива.* Зато коначни једнодимензионално-хомогени комплекс можемо сматрати и скупом добијеним разбијањем елементарне криве у отворене Jordan-ове лукове и њихове крајне тачке, а да код тога ти лукови немају заједничких тачака (в. [5], стр. 94, 95).

Природно је онда, да познате појме и ставове за елементарне криве проширујемо и на једнодимензионалне комплексе.

Нека буде дати комплекс K добивен разбијањем елементарне криве Γ на отворене лукове и њихове крајне тачке.

Простим циклом називамо онда сваки скуп једнодимензионалних елемената (дужи) комплекса K, који заједно са својим крајним тачкама образују просту затворену криву, садржану у криви Γ; а *циклом* називамо суму по модулу два (в. [5], стр. 96) од неколико простих цикала.

Комплекс K се зове *повезан,* ако је повезана крива Γ. Повезани подкомплекс комплекса K, који се не садржи ни у једном другом повезаном подкомплексу, се назива *компонента* комплекса K.

Ред повезаности или *једнодимензионални број Betti* комплекса K је ред повезаности елементарне криве Γ, тј. максимални број линеарно независних цикала те криве.

За комплекс K важи следећа *Euler-ова формула* (в. [5], ств. 97):

$$\rho_0 - \rho_1 = \pi^0 - \pi^1, \tag{1}$$

у којој ρ_0 означује број нулдимензионалних елемената комплекса, ρ_1 — број његових једнодимензионалних елемената, π^0 — број њених компонената, а π^1 — његов ред повезности. Лева страна идентитета (1) зове се *Euler-ова карактеристика* комплекса K.

2. Постављање проблема

Нека је дат ма какав једнодимензионални комплекс K. Скуп К уређујемо тако да за било који његов једнодимензионални елеменат α_1 и било који његов нулдимензионални елеменат α_0 стављамо $\alpha_1 < \alpha_0$, ако α_0 инцидира са α_1, а те елементе сматрамо неупоредивим, ако α_0 не инцидира са α_1. Постављени задатак изналажења скупова са највећим могућим бројем неинцидентних елемената комплекса K своди се, према томе, на изналажење *најопсежнијих антиланаца* у делимично уређеном скупу K. Под најопсежнијим антиланцем једног коначног једногдимензионалног комплекса подразумеваћемо сваки такав његов антиланац који нема мању потенцију од ма ког другог његовог антиланца. Најопсежнијим антиланцем у бесконачном комплексу K ћемо називати сваки његов антиланац који нема мању потенцију од ма ког другог антиланца у K, и који није права подмножина неког другог антиланца.

Уређени скуп К можемо сада писати у облику $K = R_0 \cup R_1$, где су $R_i \equiv R_i K$ слојеви скупа K.

Проблем ћемо прво решити за повезане коначне једнодимензионалне комплексе. Онда ћемо резултате проширити на све остале случајеве.

3. Повезани коначни једнодимензионални комплекси

Нека буде K један повезан коначан једнодимензионални комплекс, који има ρ_0 нулдимензионалних и ρ_1 једнодимензионалних елемената, а ред повезаности му је π^1.

Избирамо по вољи један подскуп K_0' скупа $R_0 K$. Нека има он ρ_1' елемената, тј. $k K_0' = \rho_1'$, а скуп $K_1' = R_0(x, \infty)$ $(x \in K_0')$ нека има ρ_0' елемената. Скуп

$$A = K_0' \cup (R_1 K \setminus K_1')$$

је један антиланац у K. Важи очигледно

$$kA = \rho_1' + (\rho_0 - \rho_0'). \tag{2}$$

Скуп $K' = K_0' \cup K_1'$ је један једнодимензионално-хомогени подскуп скупа K. Нека је његов ред повезаности $\pi^{1'}$, а $\pi^{0'}$ број његових компоненти. Онда важи Euler-ов идентитет

$$\rho_0' - \rho_1' = \pi^{0'} - \pi^{1'}. \tag{3}$$

Од (2) и (3) следује

$$kA = \rho_0 + \pi^{1'} - \pi^{0'}. \tag{4}$$

За π^1 и $\pi^{1'}$ важи (в. [5], стр. 97)

$$\pi^{1'} \leqslant \pi^1. \tag{5}$$

Поставља се сада питање, како треба изабрати скуп K' да антиланац A буде имао што већи број елемената. С обзиром на (4) треба у том циљу K' изабрати тако да разлика $\pi^{1'} - \pi^{0'}$ буде што већа, односно — због (3) — да Euler-ова карактеристика $\rho_0' - \rho_1'$ комплекса K' буде што мања.

а) Разматрајмо прво случајеве када K' није празан, тј. да важи $K' \neq \nu$.

У овом случају је и $K_0' \neq \nu$, тј. $\rho_1' \neq 0$. Према томе важи

$$\pi^{0'} \geqslant \pi^0 = 1. \tag{6}$$

Од (5) и (6) следује да ће kA попримити највећу могућу вредност, ако се изабере један такав подкомплекс K' комплекса K, за који ће важити $\pi^{1'} = \pi^1$, $\pi^{0'} = 1$. А такав подкомплекс увек постоји; један од њих је наиме сам комплекс K. Антиланац A имаће у том случају $kA = \rho_0 + \pi' - \pi^0 = \rho_0 + \rho_1 - \rho_0 = \rho_1$ елемената. Према томе:

Од свих антиланаца у коначном повезаном комплексу К који су облика

$$A = K_0' \cup (R_1 K \setminus K_1'),\ K_0' \neq v,$$

имају највећу потенцију они код којих је скуп $K' = K_0' \cup K_1'$ *један повезан подкомплекс комплекса К и чији ред повезаности је једнак реду повезаности комплекса К. Ако је А један од њих, важи*

$$kA = \rho_1.$$

б) Да испитамо још какав је антиланац A у случају да је $K' = v$. Онда је $K_0' = K_1' = v$ и $A = R_1 K$, па је зато

$$kA = \rho_0. \tag{7}$$

За $\pi^1 = 0$ даје (7) и (1) .

$$kA = \rho_0 = \rho_1 + 1 > \rho_1.$$

За $\pi^1 = 1$ дају нам те једнакости

$$kA = \rho_0 = \rho_1.$$

а за $\pi^1 > 1$ добијамо

$$kA = \rho_0 = \rho_1 + 1 - \pi^1 < \rho_1.$$

Према томе најопсежнији антиланац код комплекса K реда повезаности $\pi^1 = 0$ даје нам случај б), код комплекса K реда повезаности $\pi^1 = 1$ најопсежније антиланце даје нам и случај а) и случај б), а код комплекаса K реда повезаности $\pi^1 > 1$ даје нам их случај а). Добили смо, значи, следече резултате:

Најопсежнији скуп неинцидентних елемената једног коначног повезаног једнодимензионалног комплекса чији ред повезаности је нула, је скуп свих његових нулдимензионалних елемената.

Најопсежнији скупови неинцидентних елемената једног коначног повезаног једнодимензионалног комплекса К, чији ред повезаности је један, су:

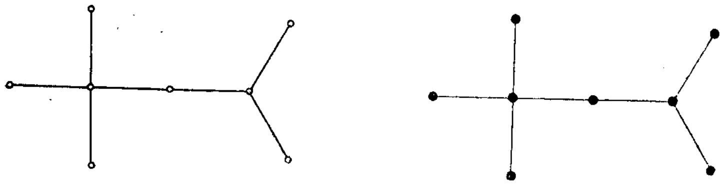
а) скуп свих нулдимензионалних елемената компекса К, и

б) сваки скуп који је унија скупа свих једнодимензионалних елемената било којег повезаног подкомплекса од К који има ред повезаности један и скупа оних нулдимензионалних *елемената од К који нису инцидентни са тим једнодимензионалним елементима. Постоји барем један овакав скуп.*

Најопсежнији скуп неинцидентних елемената једног коначног повезаног једнодимензионалног комплекса К, чији ред повезаности је већи од један, је сваки скуп, који је унија скупа свих једнодимензионалних елемената било којег повезаног подкомплекса К' од К, чији ред повезаности је једнак реду повезаности од К, и скупа свих оних нулдимензионалних елемената од К који нису инцидентни са једнодимензионалним елементима из К'. Постоји барем један овакав скуп.

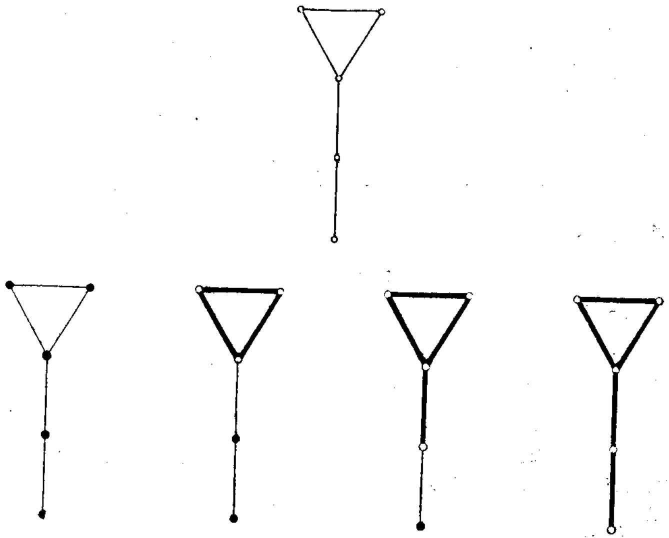
Примери:

1. На сл. 1 лево је дата шема једног повезаног коначног комплекса реда повезаности нула. На десној слици су јаче означени елементи најопсежнијег скупа неинцидентних страна. Постоји само један такав скуп.



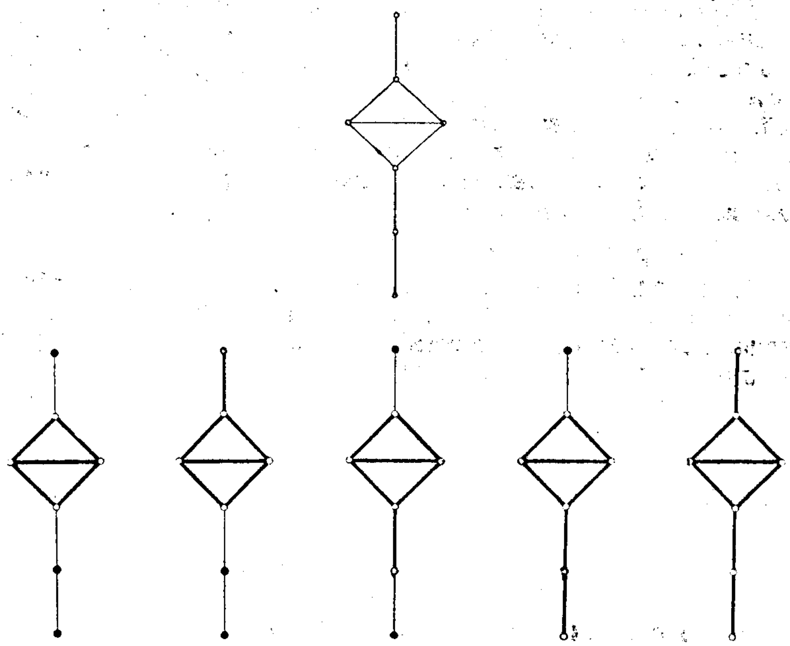
Сл. 1.

2. На сл. 2 горе дата је шема једног повезаног коначног комплекса *К* реда повезаности један. На цртежима доле су означени елементи најопсежнијих скупова неинцидентних страна од *К*.



Сл. 2.

3. На сл. 3 горе дат је један комплекс реда повезаности $\pi^1 > 1$, а доле најопсежнији скупови његових неинцидентних страна.



Сл. 3.

4. Неповезани коначни једнодимензионално хомогени комплекси

Нека је K један коначан једнодимензионални комплекс чије компоненте $K_1, K_2, \ldots, K_n$ су једнодимензионални комплекси. Комплекс K нека је делимично уређен у смисли т. 2.

Посматрајмо један антиланац A скупа K. Скуп $A_i = A \cap K_i$ је онда један антиланац у скупу K_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ако A_i није најопсежнији антиланац у K_i, онда ћемо у A подскуп A_i замењати једним најопсежнијим антиланцем A_i' у K_i, који можемо наћи према т. 3, јер је K_i повезан и коначан. Тиме добијамо један скуп

$$A' = (A \setminus A_i) \cup A_i',$$

који је антиланац у K и за који важи

$$kA' > kA.$$

Ако то урадимо за сваки $i = 1, 2, \ldots, n$, тј. за оне за које је $A_i \neq v$, као и за оне за које је $A_i = v$, добијамо један најопсежнији антиланац у K. Према томе:

Најопсежнији скуп неинцидентних елемената код коначног једнодимензионално-хомогеног комплекса K, чије компоненте су $K_1, K_2, \ldots K_n$, је сваки скуп A облика

$$A = A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_n',$$

где је A_i' један најопсежнији скуп неинцидентних елемената у компоненти K_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ комплекса K.

5. Нехомогени коначни једнодимензионални комплекси

Једнодимензионални комплекс K није димензионално-хомоген, ако постоји барем једна његова компонента која се састоји од једног нулдимензионалног елемената од K. Пошто је сваки овакав нулдимензионални елемент неинцидентан са свим осталим елементима комплекса K, важи очигледно овај став:

Најопсежнији скуп неинцидентних елемената једног коначног комплекса $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n \cup S$, где су K_i његове једнодимензионалне компоненте, а S један коначан скуп тачака за који важи $S \cap K_i = v$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, је сваки скуп A облика

$$A = A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_n' \cup S,$$

где A_i' означује било који најопсежнији скуп неинцидентних елемената у комплексу K_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

6. Коначни једнодимензионални комплекси са једним јединим најопсежнијим скупом неинцидентних страна

Комплекс ће имати само један најопсежнији скуп неинцидентних страна, ако то важи за сваку његову компоненту.

Нека буде K_i једна компонента коначног хомогенодимензионалног комплекса K, а њезин једнодимензионални број Betti нека је π^1_i. Комплекс K нека буде уређен у смуслу т. 2.

1. Ако је $\pi^1_i = 0$, онда, према т. 3, постоји само један најопсежнији антиланац у K_i, наиме скуп свих нулдимензионалних елемената из K_i.

2. Ако је $\pi^1_i > 0$, онда, према т. 3, могу постојати више најопсежнијих антиланаца у K_i. Њихов број једнак је броју оних повезаних покомплекаса комплекса K_i који имају ред повезаности једнак π^1_i, ако је $\pi^1_i > 1$. а ако је $\pi^1_i = 1$, тај број је за јединицу већи. Један од тих подкомплекаса је сам K_i. Сваки други такав подкомплекс се добија, ако се од K_i одстрани један или више његових једнодимензионалних елемената (евентуелно са неким од оних нулдимензионалних

елемената који с њима инцидирају), а да при томе новонастали подкомплекс остаје повезан и са редом повезаности π^1_i. Према томе, компонента K_i ће имати само један најопсежнији антиланац, ако се од K_i не може одстранити ни једна његова једнодимензионална страна, а да при томе нови подкомплекс остане повезан и реда повезаности π^1_i.

а) Претпоставимо сада да *руб* (в. [1], стр. 285) компоненте $\dot{K}_i$ није празан, тј. $\dot{K}_i \neq v$. У том случају постоји барем један нулдимензионални елеменат $\alpha_0 \in K_i$ који је упоредив само са једним једнодимензионалним елементом $\alpha_1 \in K_i$. Комплекс $K_i \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_0)$ је повезан и реда повезаности π^1_i. Компонента K_i има, према томе, више од један најопсежнији антиланац. Одавде следује:

Ако коначни једнодимензионално-хомогени комплекс има само један најопсежнији антиланац, онда он нема руба.

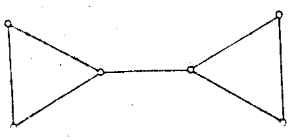
б) Претпоставимо сада да компонента K_i нема руба, тј. да је

$$\dot{K}_i = v. \tag{8}$$

Узмимо било који једнодимензионални елемент $\alpha_1 \in K_i$ и образујмо подкомплекс $K_i \setminus \alpha_1$. Ако је $K_i \setminus \alpha_1$ повезан, онда α_1 припада једном простом циклу компоненте K_i; ред повезаности комплекса $K_i \setminus \alpha_1$ је онда $\pi^1_i - 1$ (в. [5], стр. 98, 99; [5], стр. 105). Значи комплекс $K_i \setminus \alpha_1$ је или неповезан, или повезан али са мањим редом повезаности него K_i. Према томе, K_i има само један најопсежнији антиланац.

Ако услов (8) важи за сваку ону компоненту K_i комплекса K која има ред повезаности $\pi^1_i > 0$, онда K има само један најопсежнији антиланац. Према томе:

Коначни једнодимензнонално-хомогени комплекс има један једини најопсежнији скуп својих неинцидентних страна, ако свака његова компонента, чији ред повезаности је већи од нула, нема руба.



Ова теорема важи свакако за *затворене* (в. [1], стр. 275) једнодимензионалне комплексе. Али има и незатворених комплекаса који немају руба и за које, према томе, горња теорема важи. Пример таквог комплекса је дат на сл. 4.

Јасно је, да за коначни једнодимензионални комплекс који није димензионално-хомоген, важи:

Коначни једнодимензионални комплекс има само један најопсежнији скуп својих неинцидентних страна, ако то важи за унију свих његових једнодимензионалних компонената, тј.

ако свака она од њих која има ред повезаности већи од нула, нема руба.

Интересира нас још који комплекси имају само један најопсежнији скуп својих неинцидентних страна, а да се тај скуп састоји само од елемената исте димензије комплекса. Из горњег излагања следује:

Код коначног једнодимензионалног комплекса K постоји само један најопсежнији скуп A неинцидентних страна од K, а да се тај састоји само од страна једне исте димензије, онда и само онда

а) ако је ред повезаности сваке једнодимензионалне компоненте од K нула, или

б) ако је K димензионално-хомоген и без руба.

У случају а) скуп A се састоји од свих нулдимензионалних елемената, а у случају б) од свих једнодимензионалних елемената комплекса K.

Тиме је одговорено на питање постављено на крају рада [6] за случај свих коначних једнодимензионалних комплекаса.

7. Бесконачни једнодимензионални комплекси

Разгледаћемо прво повезане бесконачне комплексе.

Нека буде K један повезан безконачан једнодимензионални комплекс који је дилимично уређен у смислу т. 2. Јасно је да најопсежнији антиланци у K имају потенцију $\aleph_0$. Један од њих је наиме скуп $A = R_0 K$. Но очигледно најопсежнији антиланац је и сваки скуп

$$A' = K_0' \cup (R_1 K \setminus K_1'),$$

где је K_0' један произвољан подскуп скупа $R_0 K$, а

$$K_1' = \bigcup_x R_0 (x, \infty) \quad (x \in K_0').$$

Стварно важи $k A' = \aleph_0$, што се лако проверава.

Антиланац A' можемо формирати на толико начина на колико се начина може изабрати подскуп K_0' у скупу $R_0 K$. Значи потенција множине свих најопсежнијих антиланаца A' једнака је потенцији партитивног скупа множине $R_0 K$, значи (в. [3], § 2.1, § 4.2)

$$k P (R_0 K) = 2^{(k R_0 K)}.$$

А пошто код повезаног бесконачног K важи $k R_0 K = \aleph_0$, то је $k P (R_0 K) = c$ (continuum) (в. [3], teorem 6. 6. 2).

Код повезаног бесконачног једнодимензионалног комплекса постоји непребројиво много најопсежнијих антиланаца. Сваки од њих има пребројиво много елемената.

Исти резултат важи и код комплекаса који нису повезани, али имају барем једну компоненту која је бесконачан комплекс. На тај начин смо добили ову теорему:

Код бесконачног једнодимензионалног комплекса К постоји коначан број или непребројиво много најопсежнијих скупова неинцидентних елмената из К према томе да ли К нема или има бар једну компоненту која је бесконачан комплекс.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Alexandroff P.—Hopf H., *Topologie*, Erster Band, Band, Berlin, 1935.

[2] Kurepa G., *Sur les polytopes*, Весник Друштва математичара и физичара НР Србије, Београд, 1953.

[3] Kurepa Đuro, *Teorija skupova*, Zagreb, 1951.

[4] Reidemeister Kurt, *Einführung in die Kombinatorische Topologie*, Braunschweig, 1951.

[5] Александров П. С., *Комбинаторная топология*, Москва, 1947.

[6] Улчар Јоже, *О неинцидентним странама неких политопа*, Год. Зборник на Фил. фак., Скопје, 1955.

Jože Ulčar

ÜBER DIE STRECKENKOMPLEXE

(Zusammenfassung)

Die Aufgabe, die hier gelöst wird, ist die Bestimmung der Mengen maximaler Anzahl miteinander nichtinzidenten Seiten eines beliebig gegebenen Strecekenkomplexes*) K, d. h. aller derjenigen Mengen einer und derselben Mächtigkeit, deren Elemente miteinander nichtinzidente Seiten von K sind, die die Bedingung erfüllen, dass jede andere Menge, die ebenfalls miteinander nichtinzidente Seiten von von K als Elemente hat, eine kleinere Mächtigkeit hat. G. Kurepa [2] hat das Problem im allgemeinen, für beliebige Komplexe, gestellt und für den Fall der Symplexe gelöst. Für den Fall einiger speziellen Komplexe, wie z. B. für alle regulären Polytope und für Symplizialpolytope im n-dimensionalen Euklidischen Raum mit $n+2$ Ecken, ist diese Aufgabe in meiner Arbeit [6] gelöst.

Es soll mit K_ν ein gegebener endlicher zusammenhängender eindimensionaler Komplex, dessen Zusammenhangszahl ν ist, bezeichnet werden. M_{K_ν} sei die gesuchte Menge der Mengen maximaler Anzahl miteinander nichtinzidenten Seiten von K_ν. Es gelten folgende Sätze:

*) Wir meinen an die sogenannten apsoluten *vollständigen* eindimensionalen simplizialen Komplexe ([5], S. 150, 154). So nennt man jeden Streckenkomlex K, die die Bedingung erfüllt, dass die beiden Randpunkte einer jeden Strecke aus K auch Elemente von K sind.

Die Menge M_{K_0} hat nur ein Element; das ist die Menge aller nulldimensionalen Seiten von K_0.

Die Elemente von M_{K_1} sind:

a) die Menge aller nulldimensionalen Seiten von K_1, und

b) jede Menge, die Summe der Menge aller eindimensionalen Seiten eines beliebigen zusammenhängenden Unterkomplexes K_1' von K_1, dessen Zusammenhangszahl Eins ist, und der Menge jener nulldimensionalen Seiten von K_1, die mit den Seiten von K_1' nicht inzident sind. Es existiert wenigstens eine solche Menge.

Ein Element der Menge $M_{K\nu}$, $\nu > 1$, ist jede Menge $M = M_1 \cup M_0$, wo M_1 die Menge aller eindimensionalen Seiten eines beliebigen Unterkomplexes K_ν' von K_ν, dessen Zusammenhangszahl ν ist, bedeutet, und M_0 die Menge aller nulldimensionalen Seiten von K_ν ist, die nicht mit den Elementen aus K_ν' inzident sind. Andere Elemente hat die Menge $M_{K\nu}$, $\nu > 1$, nicht.

2. *Die Menge maximaler Anzahl miteinander nichtinzidenten Seiten eines endlichen eindimensionalen Komplexes $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n \cup S$, wo K_i eindimensionale Komponenten von K sind, und S eine endliche Menge von Punkten, für welche $S \cap K_i = v$ gilt, ist jede Menge*

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup S,$$

wo mit A_i eine beliebige Menge maximaler Anzahl miteinander nichtinzidenten Seiten im Komplex K_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichnet ist.

3. Auf die Frage, welche diejenigen eindimensionalen Komplexe sind, die n u r e i n e Menge maximaler Anzahl miteinander nichtinzidenten Seiten haben, beantwortet folgender Satz:

Bei einem endlichen eindimensionalen Komplex existiert nur eine Menge maximaler Anzahl miteinander nichtinzidenten Seiten, wenn jede eindimensionale Komponente von Kon K, deren Zusammenhangszahl nicht Null ist, keinen Rand hat.

4. Es ist interressant noch festzustellen, bei welchem endlichen Streckenkomplex K nur eine Menge M maximaler Anzahl miteinander nichtinzidenten Seiten besteht, und das ausserdem diese Menge nur aus Elementen einer und derselben Dimension besteht. Es folgt:

Bei K existiert eine und nur eine Menge M, wenn entweder

a) die Zusammenhangszahl jeder eindimensionalen Komponente von K Null ist, oder

b) K homogendimensional ist und keinen Rand hat.

Im Falle a) besteht M aus allen nulldimensionalen, und im Falle b) von allen eindimensionalen Elementen von K.

Damit ist auf die am Ende von [6] gestellten Frage, Komplexe aufzusuchen, bei denen nur eine solche Menge M existiert, für den speziellen Fall der eindimensionalen Komplexe beantwortet.

5. Für die unendlichen Streckenkomplexe (die abzählbar viel Seiten haben) kann man für die Mengen M maximaler Anzahl miteinander nichtinzidenten Seiten folgendes sagen:

Bei einem unendlichen eindimensionalen Komplex K existiert entweder eine endliche Anzahl oder unabzählig viel Mengen M je nachdem K keine oder wenigstens eine Komponente hat, die ein unendliches Komplex ist. Die Mächtigket jeder von diesen Mengen M ist $\aleph_0$.