ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С. Здравковска

В заметке [1] Р. Том поставил вопрос о топологической классификации полиномиальных отображений p: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$. В настоящей заметке указан алгоритм, дающий такую классификацию для алгебраических функций, рассматриваемых как отображения римановой поверхности на сферу Римана. Для многочленов степени меньше 7 соответствующие вычисления проведены полностью.

1. Определения. Пусть f: $V \to S^2$ — разветвленное над n точками k-листное накрытие. Два таких отображения f_1, f_2 назовем *T-эквивалентными*, если существуют такие (сохраняющие ориентацию) гомеоморфизмы

$$g\colon\ V \to V \text{ и } h\colon\ S^2 \to S^2,$$

что

$$f_2 \circ g = h \circ f_1.$$

Рассмотрим множество $N \subset S^2$, состоящее из n корней степени n из 1. Легко видеть, что каждое накрытие, разветвленное над n точками S^2, T-эквивалентно такому накрытию, множеством точек ветвления которого является множество N.

Группой кос Артина $B(n)$ называется фундаментальная группа пространства неупорядоченных наборов n точек S^2, отличных от ∞. За базисную точку в этом пространстве примем N. Группа кос $B(n)$ естественно действует на множестве накрытий над S^2, разветвленных лишь над точками N.

2. Теорема. *Существует взаимно однозначное соответствие между классами T-эквивалентности, разветвленных над n точками накрытий над S^2, и орбитами действия группы кос Артина $B(n)$ на множестве накрытий над S^2, разветвленных над N.*

Доказательство вытекает ~~из следующих известных~~ фактов:

1. Группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов сферы S^2 линейно связна.

2. Отображение группы Артина $B(n)$ в группу кос из n нитей на сфере S^2 является отображением на.

Замечание. В действительности эта теорема дает алгоритм для T-классификации.

Заметим, что число листов k и число точек ветвления n является очевидными инвариантами T-эквивалентности.

Далее, с каждой точкой ветвления связано разбиение числа k на слагаемые (равные кратностям). Поскольку точек ветвления n, мы получаем (неупорядоченный) набор Σ из n разбиений. Этот набор кратностей Σ также является T-инвариантом.

Множество разветвленных над N накрытий с данными кратностями ветвления конечно и явно вычисляется. Действие $n-1$ стандартных образующих группы кос на этом множестве также явно вычислимо. Таким образом, мы можем явно перечислить все классы T-эквивалентности, разветвленных над N накрытий над S^2.

3. Случай многочлена. Том [1] назвал ρ-накрытиями такие k-листные разветвленные накрытия над S^2, для которых точка ∞ есть точка ветвления кратности k, а число критических точек с конечными критическими значениями (с учетом их кратностей) равно $k-1$.

В той же работе Том доказал, что каждый многочлен задает ρ-накрытие p: $S^2 \to S^2$, а каждое ρ-накрытие задается многочленом (определенным с точностью до линейной замены аргумента).

Таким образом, T-классификация многочленов сводится к T-классификации ρ-накрытий, и мы можем воспользоваться результатами п. 2.

В случае ρ-накрытий общий алгоритм п. 2 несколько упрощается. В частности, при вычислениях полезна

Лемма. *Если все критические значения многочлена различны, то его класс T-эквивалентности определяется набором кратностей нулей производной.*

4. Классификация многочленов степени, меньшей 7.

Степень многочлена	1	2	3	4	5	6
Число классов T-эквивалентности	1	1	2	4	9	26

Вычисления показывают, что для многочленов степени $\leqslant 5$ класс T-эквивалентности определяется набором кратностей Σ. Для многочленов степени 6 это верно для всех наборов кратностей, кроме следующих четырех:

Кратности нулей производной	1,1 1,1 1	1,1 2,1	1,1 3	2,1 2
Число классов	4	3	2	2

Кратности в одной горизонтальной строке соответствуют критическим точкам с одинаковыми критическими значениями.

Составление этих таблиц требует довольно длинных вычислений, которые можно значительно сократить, если воспользоваться следующими геометрическими построениями.

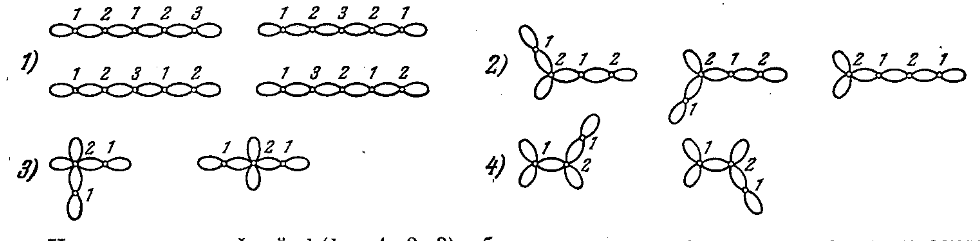
5. Картинки. Рассмотрим полиномиальное отображение p: $S^2 \to S^2$, критическими значениями которого являются корни степени n из 1. Обозначим через D область $|z| \leqslant 1$ на сфере-образе. Ее прообраз $p^{-1}D$ представляет собой объединение k топологических замкнутых кругов, пересекающихся в критических точках. При этом в критической точке кратности l пересекается l кругов.

Легко видеть, что множество $p^{-1}D$ связно и односвязно. Отметим на каждом из кругов прообраз каждого корня степени n из 1. В частности, будет отмечена каждая точка пересечения кругов.

По расположению множества $p^{-1}D$ с отмеченными точками на сфере легко восстановить исходное разветвленное накрытие. Действие группы кос на накрытия также легко описывается в этих терминах.

Тем самым задача T-классификации сводится к перечислению всех допустимых расположений системы топологических кругов с отмеченными точками на сфере и к выяснению того, какие из этих расположений переводятся друг в друга действием группы кос.

Ниже приведены не переводящиеся друг в друга действием группы кос расположения систем кругов, соответственно четырем указанным в п. 4 наборам кратностей



На рисунках цифрой l ($l = 1, 2, 3$) обозначена критическая точка с критическим значением $e^{2\pi i l/n}$ (в случае 1) $n = 3$, в остальных $n = 2$).

Автор благодарен В. И. Арнольду, А. Г. Хованскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Thom, L'équivalence d'une fonction differentiable et d'un polynome, Topology 3 (1965), 297—307.

Поступило в Правление общества 23 февраля 1970 г.