МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 11 (2025), 211 – 223
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-11.html

МАТЕМАТИЧКИ МЕТОДИ ВО СМЕТКОВОДСТВО НА ТРОШОЦИ

Владимир Јорданов[1]

1. ВОВЕД

Сметководството на трошоци претставува неформално множество флексибилни алатки коишто ги користат менаџерите за да проценат колку добро работи компанијата. Сметководството на трошоци овозможува претпријатијата да видат колку трошат, каде настануваат трошоците и колкав профит остваруваат. Најчесто се користи за интерна контрола на трошоци и максимизирање на ефикасноста на претпријатието. Сметководството на трошоци е интерно фокусирано и користи системи специфични за претпријатието при контрола на трошоците, [1].

Трошоците се класифицираат, [1], [2], според:

– управувачката функција, и тие можат да бидат производни или непроизводни;

– препознатливоста, според која можат да бидат директни или индиректни;

– времето на наплата, наспроти приходот од продажбата, во овој случај тие се делат на трошоци за прозводство и периодични трошоци;

– нивната важност во контролата и одлучувањето, при што тоа се трошоци што можат да се контролираат, трошоци што не можат да се контролираат, како и стандардни, инкрементални и потонати трошоци;

– нивното однесување во однос на промената на активностите, и тие се делат на варијабилни, фиксни и полуфиксни трошоци.

Во овој труд ќе се разгледуваат полуфиксните трошоци. Но, за да се пресметат и разберат полуфиксните трошоци, потребно е да се познаваат карактеристиките на фиксните и на варијабилните трошоци. Варијабилните трошоци се менуваат заедно со

обемот на производството и нивото на активност на претпријатието, [1], [2], [3]. Фиксните трошоци се трошоци чија вредност останува константна независно од промените во обемот на производство и нивото на активност (рента, осигурување, данок на имот). Полуфиксните трошоци имаат карактеристики на фиксни и варијабилни трошоци, т.е. трошоците остануваат фиксни за дадено ниво на производство или активност, а стануваат варијабилни кога го надминуваат тоа ниво (инспекција, супервизија, поправки и одржување), [5].

Двата најзначајни математички методи за пресметка на фиксните и варијабилните компоненти на полуфиксните трошоци се методот високо-ниско и методот на најмали квадрати.

2. МЕТОД ВИСОКО–НИСКО

Основна препоставка на методот високо-ниско е линеарната врска меѓу полуфиксните трошоци (y) и нивото (количината) на активност (x) дадена со равенката:

$$y = a + bx\,, \tag{1}$$

каде што со a се означени фиксните трошоци, а со b – варијабилните трошоци за единица активност.

За да се утврдат вредностите на a и b, методот високо-ниско користи само два пара од податоците (x, y) кои одговараат на највисоката и најниската вредност на нивото на активност, која се гледа од независната променлива x. Ги избираме паровите (x_1, y_1) и (x_2, y_2), така што вредноста на x во избраните парови е најголемата, односно најмалата вредност од сите вредности на x, соодветно. Да забележиме дека ова не мора да важи и за вредностите на y во тие парови, [2], [8].

Следно што треба да се прави е да се повлече права со равенка (1) која минува низ точките (x_1, y_1) и (x_2, y_2), што значи дека варијабилните трошоци b се коефициентот на правецот на правата и се добиваат како однос меѓу промената на трошоците Δy и промената на активноста Δx, т.е.

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\,. \tag{2}$$

Фиксните трошоци a се слободниот член на равенката на правата (1) и се пресметуваат според следнава формула:

$$a = y_1 - bx_1, \qquad (3)$$

т.е. фиксните трошоци се добиваат како разлика од трошокот при највисоката активност (вредноста на y за највисоката активност x_1) и производот од варијабилните трошоци за единица активност со највисоката активност x_1.

Откако ќе се одреди врската меѓу полуфиксните трошоци и нивото на активност, добиената врска (1) се користи за предвидување на полуфиксните трошоци за дадено ниво на активност x.

Да разгледаме еден пример.

Пример 1. Една производствена компанија ги има следниве податоци на месечно ниво (табела 1) за директните работни часови вложени во производството на даден производ во текот на мај - декември 2023 година, изразени во илјади часови и производствените општи трошоци изразени во илјади евра.

Месец /2023 год.	**Работни часови x**	**Производствени трошоци y**
мај	23 = x_1	25 = y_1
јуни	12	20
јули	12	10
август	22	22
септември	7 = x_2	14 = y_2
октомври	15	18
ноември	17	20
декември	14	16

Табела 1. Податоците (x, y) за Пример 1.

Според методот високо–ниско имаме:

I. Се избира парот со највисока и најниска вредност соодветно по x. Како што е спомнато погоре, мерката на активност x ги определува паровите (x,y). Одредуваме дека $(x_1, y_1) = (23,25)$ и $(x_2, y_2) = (7,14)$. Да забележиме дека иако x_1 е највисоката, а x_2

најниската вредност за x, тоа не е случај со y_1 и y_2, поточно y_2 не е најниската вредност за y.

II. Се пресметуваат варијабилните трошоци за единица активност:

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{25-14}{23-7} = \frac{11}{16} = 0,6875$$ илјади евра по работен час.

III. Се пресметуваат фиксните трошоци како разлика меѓу полуфиксните трошоци и вкупните варијабилни трошоци во (x_1, y_1):

$$a_1 = y_1 - bx_1 = 25 - 0,6875 \cdot 23 = 9,1875$$ илјади евра.

Да забележиме дека ќе се добие истата вредност ако пресметката ја вршиме со парот со најниска активност (x_2, y_2):

$$a_2 = y_2 - bx_2 = 14 - 0,6875 \cdot 7 = 9,1875$$ илјади евра.

IV. Пресметаните вредности се користат во формулата (1) за определување на врската меѓу полуфиксните трошоци на претпријатието и нивото на активност:

$$y = a + bx = 9,1875 + 0,6875x\,.$$

V. Да ги пресметаме очекуваните полуфиксни трошоци за производство за месец во кој се потрошени 12 илјади работни часови за производство:

$$y = a + bx = 9,1875 + 0,6875x = 9,1875 + 0,6875 \cdot 12 = 17,4375\,.$$

Предвидените трошоци за производство се 17 437 евра и 50 центи, што се пониски од оние во јуни 2023, но доста блиски до нив, а се многу повисоки во однос на трошоците во јули 2023 година, месеци во кои се потрошени 12 илјади работни часови за производство. Може да заклучиме дека податокот за јули 2023 година претставува отстапување на трошоците при стандардната активност.

Подолу ќе дадеме еден сличен пример кој не е врзан со производство.

Пример 2. Една болница сака да ги утврди идните месечни трошоци за одржување, со цел да го дефинира буџетот. Менаџментот верува дека трошоците за одржување се полуфиксни трошоци, со

што бројот на часови кои пациентите ги поминуваат во болницата се варијабилни трошоци.

Месец	Часови во болница	Тршоци за одржување (евра)
Јули	3000	9000
Август	2000	6500
Септември	500	3000
Октомври	1800	4000

Табела 2. Податоци за Пример 2.

Ќе ги пресметаме варијабилните и фиксните компоненти на трошоците за одржување користејќи го методот високо-ниско. Парот (x,y) чија највисока вредност за x е за јули, додека оној со најниска вредност за x е септемеври. Во овој случај, имаме:

	Часови во болница (x)	Тршоци за одржување во евра (y)
Високо	3000	9000
Ниско	500	3000
Разлика	2500	6000

Табела 3. Определување на највисокиот и најнискиот пар (x,y) според вредноста на x и пресметување на разликата помеѓу нив.

Варијабилните трошоци за час се $b=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6000}{2500}=2,4$ евра за работен час. Вкупните варијабилни и фиксни трошоци се пресметуваат на следниот начин:

	Високо	Ниско
Тршоци за одржување	9000	3000
Варијабилни трошоци (2,4 евра/h)	7200 $(=3000\cdot 2,4)$	1200 $(=500\cdot 2,4)$
Фиксни трошоци	1800	1800

Табела 4. Пресметка на варијабилни и фиксни трошоци.

Вкупните варијабилни трошоци се пресметуваат со множење на највискоката и најниската вредност за часови во болница (x) со варијабилните трошоци по час ($2,4/h). Додека фиксните трошоци се пресметуваат со одземање на трошоците за одржување и соодветните вкупни варијабилни трошоци на еден од следните начини:

$$a_1 = y_1 - bx_1 = 9000 - 3000 \cdot 2,4 = 1800 \text{ или}$$

$$a_2 = y_2 - bx_2 = 9000 - 500 \cdot 2,4 = 1800 .$$

Според ова, полуфиксните трошоци на болницата се пресметуваат со формулата: $y = 1800 + 2,4x$. Така, на пример, за 1000 часови во болница формулата би била: $y = 1800 + 2,4 \cdot 1000$, со што вкупните трошоци за одржување би биле 4200 евра, од кои варијабилни трошоци 2400 евра и фиксни трошоци 1800 евра.

Методот високо–ниско овозможува лесно пресметување на проценетата вредност на полуфиксните трошоци поради тоа што ги користи само два пара од податоците (x, y). Методот, исто така, е особено прецизен за операции и трошоци што се движат линеарно, [6], [7], [9].

Меѓутоа, методот има повеќе значителни слабости. Како прво, во практиката повеќето операции и трошоци не се линеарни. Методот не го зема предвид влијанието на инфлацијата врз варијабилните и фиксните трошоци, [9], и го поедноставува комплексниот однос помеѓу производството и неговите трошоци. Го игнорира релевантниот опсег на фиксните трошоци коишто утврдуваат на кое ниво на активност фиксните трошоци остануваат исти, а на кое ниво се променуваат. Не ги зема предвид промените во стапките на варијабилните и фиксните трошоци, [5], [9]. Тоа што методот високо – ниско ги користи само највискиот и најниските пар на податоци во однос на нивото на активност, а притоа ги игнорира останатите трошоци и мерки на активност, значи дека постои можност вредностите што се добиваат со него да не ги претставуваат трошоците што би се добиле на тоа ниво на активност под нормални услови. Причината за оваа појава се трошоци што се повисоки или пониски од стандардно (outlier costs), [3], [4]. Од истата причина, може да се случи пресметаните фиксни трошоци да имаат негативна вредност. Ова значи дека

вкупните трошоци на високо или ниско ниво не се соодветни на движењето на трошоците во целина, [4].

3. МЕТОД НА НАЈМАЛИ КВАДРАТИ

Методот на најмали квадрати се користи за одредување на параметрите на линеарната регресиона функција со која се моделира врската меѓу полуфиксните трошоци и нивото на активност врз основа на податоци од минатото (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n):

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, ..., n, \qquad (4)$$

каде ε_i се независни и еднакво распределни случајни компоненти со математичко очекување 0, што повлекува дека очекуваната вредност на полуфиксните трошоци можеме да ја пресметуваме според формулата (1). Потоа, таа формула се користи за пред-видување трошоци на различни нивоа на активност, [13]. Тоа е статистички метод којшто ги зема предвид сите податочни точки. Заради ова, методот најчесто се користи за буџетирање, предви-дување на економски фактори, како движењето на акциски цени и носење деловни одлуки, [10], [11].

Со овој метод се наоѓа права на регресија што најдобро го опишува податочното множество од подредени парови. На овој начин се одредува врската помеѓу точките што ги претставуваат податоците. Секоја точка претставува врска помеѓу непозната зависна променлива (y) и позната независна променлива (x), [11], [12].

Целта на овој метод е да ги најде вредностите на параметрите a и b со минимизирање на сумата од квадрати на вертикалните растојанија (грешки) помеѓу точките што претставуваат податоци (x_i, y_i) и точките од трошочната функција за истото ниво на активност $(x_i, a + bx_i)$, [3], [13], т.е се решава следниот проблем на минимизација:

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2. \qquad (5)$$

Со анулирање на првите парцијални изводи на функцијата на цел на проблемот (5) се добиваат формулите за пресметување на фиксните и варијабилните трошоци според овој метод:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad (6)$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \quad (7)$$

Се покажува дека за овие вредности на a и b, функцијата на цел на проблемот (5) достигнува минимум.

Пример 3. Компанијата Хронос произведува луксузни часовници. Во Табела 5 се дадени вкупните трошоци за производство на определен број часовници за даден месец, како и пресметката на променливите што треба да се користат во методот на најмали квадрати. Вредностите на производствените трошоци се дадени во илјади евра.

Месец *(i)*	**Број на произведени часовници (x_i)**	**Производствени трошоци (y_i)**	${x_i}^2$	$x_i y_i$
Јануари	6	12	36	72
Февруари	4	9	16	36
Март	3	7	9	21
Април	3	5	9	15
Мај	8	10	64	80
Јуни	2	3	4	6
Јули	1	2	1	2
Вкупно	**27**	**48**	**139**	**232**

Табела 5. Пресметка на клучни променливи за методот на најмали квадрати за Пример 3.

Ги пресметуваме вредностите на a и b според формулите (6) и (7):

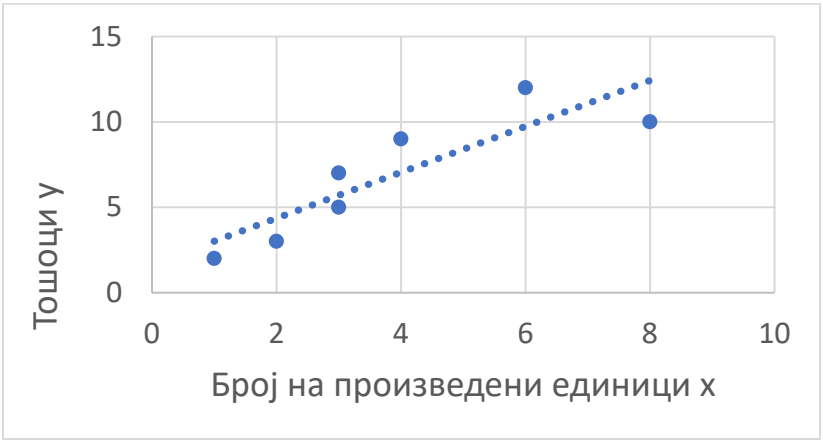
$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{7\cdot 232 - 27\cdot 48}{7\cdot 139 - 27^2} = \frac{328}{244} = 1{,}3443,$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{48 - 1{,}3443\cdot 27}{7} = \frac{11{,}7039}{7} = 1{,}672.$$

Тогаш, правата на регресија со која се опишува врската меѓу полуфикцните трошоци и нивото на активност добиена со методот на најмали квадрати е:

$$y = 1{,}672 + 1{,}3443x.$$

На следниот график се прикажани податочните точки и добиената права на регресија.



Слика 1. Движење на полуфиксните трошоци преставено со линеарна функција.

Прогнозата за август можеме да ја направиме за произведени 7 часовници. Бидејќи се веќе пресметани a и b, следува дека $y = 1{,}672 + 1{,}3443 \cdot 7$, па варијабилните трошоци ке бидат 9,4101, т.е. 9410 евра и 10 центи; а вкупните производствени трошоци ќе бидат $y = 11{,}0821$, т.е. 11082 евра и 10 центи.

Предноста на методот на најмали квадрати е тоа што е попрецизен во споредба со методот високо – ниско, што е особено важно за финансиските и сметководствените функции на претпријатијата. Методот, исто така има силна теоретска основа во статистиката, што значи дека има солидно математичко оправдување, [10], [11]. Но, можно е методот на најмали квадрати да не дава точни прогнози ако податоците не се правилно (линеарно) дистрибуирани. Ова може да се избегне ако се користат повеќе податоци. Меѓутоа, методот потешко се применува кога претпријатието го користи за операција со премногу податоци. Причината за ова е тоа што поголемиот број податоци значи поголема можност за грешки. Ова значи дека во извесна мера прогнозите може да бидат несигурни. Се претпоставува дека двете променливи x и y имаат некаква врска, поточно дека постои линеарна врска меѓу

нив, а притоа се игнорира влијанието на надворешните фактори и нивните последици. Методот не се справува добро со отстапки (outliers), што би можело да биде до таков степен што тие би влијаеле врз крајниот резултат, [12].

Пример 4. Со табелата 6 се дадени директните работни часови (изразени во илјади) и трошоците за одржување на машините (изразени во илјади евра) во компанија АБВ за производство на чевли за шест месеци.

	Директни работни часови x (во илјади)	Трошоци за одржување y (во илјади евра)	xy	x^2
Јануари	3	7	21	9
Февруари	2	10	20	4
Март	2	5	10	4
Април	3	5	15	9
Мај	4	8	32	16
Јуни	6	8	48	36
Вкупно	**20**	**43**	**146**	**78**

Табела 6. Клучни вредности и променливи во пример 4.

Од табелата 6 следува дека:

$n = 6$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 20$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 43$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 146$ и $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 78$.

Според ова, вредностите за варијабилните трошоци за единица ниво на активност b и фиксните трошоци a ќе бидат:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{6 \cdot 146 - 20 \cdot 43}{6 \cdot 78 - 20^2} = \frac{16}{68} = 0{,}235,$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{43 - 0{,}235 \cdot 20}{6} = \frac{38{,}3}{6} = 6{,}38.$$

Според методот на најмали квадрати формулата за полу–фиксни трошоци би гласела: $y = 6{,}38 + 0{,}235x$.

Да направиме едно предвидување за јули. Да претпоставиме дека се сработени 5 илјади работни часови. Од претпоставката следува дека $y = 6{,}38 + 0{,}235 \cdot 5$. Варијабилните трошоци за одржу–

вање ќе бидат 1,175 илјади евра, т.е. 1175 евра, а вкупните трошоци за одржување ќе бидат 7,555 илјади евра, т.е. 7555 евра.

Доколку требаше да направиме предвидување за вкупните трошоци за одржување кога сработените работни часови се надвор од опсегот на x (од неговата најмала вредност 2 до неговата најголема вредност 6), тогаш тоа предвидување за варијабилните трошоци и вкупните трошоци за одржување би било поневеродостојно.

Со методот високо-ниско, првин се одредува највисоката и најниската x вредност. Во овој случај, највисоката вредност е x_1=6 со соодветно y_1= 8. Најниската вредност за x е x_2=2, која се достигнува во февруари и март. Ако го земеме податокот од март, тогаш $y_2 = 5$ и во овој случај се добива дека варијабилните трошоци ќе бидат

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{8-5}{6-2} = \frac{3}{4} = 0,75 .$$

Да забележиме дека најниската врдност $x_2 = 2$ се повторува со соодветно $y_2 = 10$. Во тој случај добиваме дека

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{8-10}{6-2} = \frac{-2}{4} = -0,5 ,$$ т.е.

варијабилните трошоци ќе бидат негативни, што е невозможно. Очигледно, податокот за месец февруари спаѓа во outliers, па од разгледаните два модела ќе го одбереме оној кој ќе ни овозможи да направиме поверодостојна прогноза, т.е. првиот модел. За овој модел фиксните трошоци ќе бидат $a_1 = y_1 - bx_1 = 8 - 0,75 \cdot 6 = 3,5$. Формулата за вкупни трошоци за одржување е $y = 3,5 + 0,75x$.

Според методот високо–ниско, за 5 (илјади) работни часови во јули варијабилните трошоци за одржување ќе бидат 0,75 · 5 = 3,75 илјади евра, т.е. 3750 евра, а вкупните трошоци за одржување ќе бидат 7,25 илјади евра, т.е. 7250 евра.

Од пресметките се гледа дека прогнозираните вредности со методот високо–ниско се разликуваат од тие на методот на најмали квадрати. Како што беше погоре кажано, методот високо–ниско е осетлив на најмалите и најголемите вредности, со што значително може да се дојде до промена на моделот. Затоа, прог–

нозите добиени со методот на најмали квадрати може да ги смета-ме за поверодостојни и од причина што методот на најмали квад-рати ги зема предвид сите вредности со што промените на најма-лите и најголемите вредности се помалку влијателни.

4. ЗАКЛУЧОК

Според претходно изложеното, методот на најмали квадрати е подобрата опција за предвидување на трошоците, доколку прет-пријатието работи со сите потребни информации за своите фи-нансиски и сметководствени операции. Овој метод е идеален за поголеми претпријатија и покомплексни операции каде што прецизноста на прогнозата е поважна од брзината на пресмет-ката. Методот високо–ниско е корисен ако претпријатието има ограничени финансиски информации. Ова значи дека е корисен за помали претпријатија коишто побрзо се движат, како и за почетна анализа и буџетирање. Покрај тоа, овие методи можат да се користат за предвидување профит. Прогнозирањето на профи-тот е на ист начин како и прогнозирањето на трошоците, само што таа прогноза е изградена на податоци за профит.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Проф. Д-р Слободан Марковски, Проф. Д-р. Блажо Недев, *Сметководство на менаџмент,* Економски факултет – Скопје, 2003.

[2] Ray H. Garrison, D.B.A., CPA, Eric W. Noreen, Ph.D., CMA, Peter C. Brewer, Ph.D., *Managerial Accounting,* McGraw - Hill Education, 2018.

[3] Jae K. Shim, Ph.D., Joel G. Siegel, Ph.D., CPA, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Managerial Accounting Second Edition,* McGraw – Hill, 1998.

[4] *Accounting Coach, What happens when the high-low method ends up with a negative amount?* https://www.accountingcoach.com/blog/high-low-method

[5] *AccountingTools, High-low method definition*
https://www.accountingtools.com/articles/what-is-the-high-low-method.html

[6] *Corporate Finance Institute(CFI), High-Low Method*
https://corporatefinanceinstitute.com/resources/accounting/high-low-method/

[7] *Investopedia, High-Low Method Definition*
https://www.investopedia.com/terms/h/high-low-method.asp

[8] *WallStreetMojo, High-Low Method Formula*
https://www.wallstreetmojo.com/high-low-method-formula/

[9] *Accountinguide, High Low Metho*
https://accountinguide.com/high-low-method/

[10] *Investopedia, Least Squares Method: What It Means, How to Use It, With Examples*
https://www.investopedia.com/terms/l/least-squares-method.asp

[11] *Magnimetrics, Least-Squares Method to Estimate the Cost Function*
https://magnimetrics.com/least-squares-method-cost-function/#:~:text=The%20Least%2DSquares%20regression%20model,to%20support%20decision%2Dmaking%20processes.

[12] *Cuemath, Least Square Method*
https://www.cuemath.com/data/least-squares/

[13] *XPLAIND, Least-Squares Regression in Cost Estimation*
https://xplaind.com/234559/least-squares-regression-method

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Економски факултет – Скопје
Бул. Гоце Делчев, бр. 9В, Скопје
e-mail: jordanov.vlad@gmail.com

Примен: 12.10.2023
Поправен: 20.4.2025
Одобрен: 23.4.2025
Објавен на интернет: 25.4.2025