МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 1 (2017), 137 – 158

# ПРЕДВИДУВАЊЕ НА РЕЗЕРВИТЕ ЗА ИСПЛАТА НА ШТЕТИТЕ ПРИ НЕЖИВОТНО ОСИГУРУВАЊЕ

*Марко Димовски* [1]

Во модерниот начин на живеење, луѓето сѐ почесто се решаваат да ги намалат штетите при ненадеен несреќен случај, користејќи ги услугите на осигурителните компании кои нудат животно и неживотно осигурување. Осигурителните компании имаат потреба да располагаат со голем капитал и него да го распределат на таков начин што во секое време тој да биде достапен за да ги покријат штетите кои им се случиле на корисниците на нивните услуги, во зависност од склучениот договор.

Луѓето задолжени за распределбата на капиталот, треба да имаат соодветни познавања од различни области на математиката, првенствено од областа на статистиката и предвидувањата. Во овој труд ќе се насочиме кон примената на математиката во неживотното осигурување, т.е. ќе биде претставен математички метод со кој се врши предвидување на резервите коишто треба да ги поседува компанијата со цел да врши навремена и ефикасна исплата на штетите.

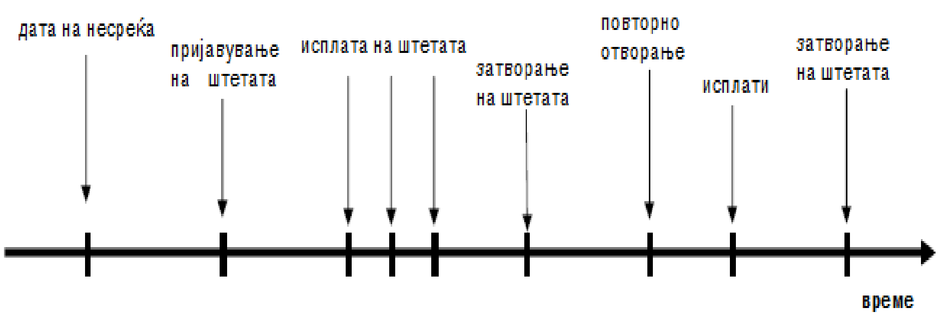
## 1. НЕЖИВОТНО ОСИГУРУВАЊЕ, РЕЗЕРВИ НА ШТЕТИ

Како посебна бранша од осигурувањето, неживотното осигурување главно ги опфаќа следните понуди:

- Осигурување на моторни возила (од автоодговорност и каско осигурување);
- Осигурување на имот (пожар, провална кражба, разбојништво, кршење стакло, домаќинско осигурување, итн.);
- Осигурување од одговорност (осигурување од одговорноста на директори, менаџери, адвокати и други од штета предизвикана кон трето лице);
- Осигурување на лица од последици на несреќен случај;
- Здравствено осигурување;
- Транспортно осигурување (осигурување со кое се осигуруваат оние коишто пренесуваат стока со камион, авион или брод од штета која би ја направиле врз стоката која ја пренесуваат);
- Останати осигурувања (патничко осигурување, осигурување од епидемија, итн.).

Договорот кој осигурутелната компанија го склучува со своите клиенти се нарекува *полиса*. Според полисата, осигурителната компанија добива фиксна сума пари, наречена *премија*, додека осигуреникот добива гаранција за финансиско покривање на штетите од кои се осигурал, до одредена сума во согласност со склучената полиса. Секоја полиса си има своја дата на потпишување и времетраење, кое најчесто изнесува една година. Периодот во кој една полиса има важност, се нарекува *скаденца*. Доколку на осигуреникот му се случи некоја штета за која е осигуран во времетраењето на скаденцата, тогаш тој има право да ја пријави штетата и да очекува целосна или делумна исплата од осигурителната компанија во согласност со полисата. Интересно е што осигуреникот може да ја пријави настанатата штета неколку години по истекот на скаденцата, бидејќи, единствено е важно штетата да се случила за времетраењето на полисата. Постојат повеќе причини поради кои се случуваат пријавувања на штетите по истекот на скаденцата на полисата. Доколку се работи за некоја повреда, постои шанса осигуреникот да биде подложен на испитувања на подолг временски период, што имплицира констатација на финалните последици од повредата по истекот на скаденцата. Откако осигурителната компанија ќе ја исплати, односно ликвидира некоја штета, таа се затвора, но во наредните неколку години (во зависност од правилата во компанијата), случајот може повторно да се отвори и да биде предмет на разгледување.

Значи, една осигурителна компанија не секогаш е во можност да ги исплати штетите веднаш по нивното настанување. Ќе го претставивме процесот на настанување на една штета и нејзиното решавање на една временска оска прикажана на Слика 1.




**Слика 1.** Процес на настанување на штетите и нивно решавање.

Една осигурителна компанија за неживотно осигурување е задолжена секоја година да формира технички резерви за штетите кои не се исплатени, а настанале во претходната календарска година. Со цел да се даде реална финансиска слика за целокупниот обем на штети, се формираат два вида на технички резерви.

- *RBNS (Reported But Not Settled)* – резерви за штетите кои се пријавени, но не се исплатени.
- *IBNR (Insured But Not Reported)* – резерви за штетите кои се случиле во дадениот период, но сѐ уште не се пријавени.

RBNS резервите може да се утврдат со поединечна проценка на секоја штета која е пријавена, но сѐ уште не е решена. Оваа проценка се врши врз основа на податоци од слични штети кои настанале во минатото. Од друга страна, вториот тип резерви може да биде утврден само со помош на математички методи, користејќи го познатиот развој на платените штети во минатото и имајќи ги предвид RBNS резервите. Ако RBNS резервите не се претставени индивидуално како оценка на идните плаќања на компензации за секоја од настанатите штети, тогаш на актуарот му преостанува да ги користи податоците за да го опише развојот на идните плаќања со цел да ја оцени сумата од IBNR и RBNS резервите. Токму актуарот е лицето кое се занимава со финансиското влијание на неизвесноста и ризикот, односно вработениот во осигурителните компании кој врши проценка на резервите за штетите кои дополнително треба да се исплатат или пак за оние штети кои одново ќе бидат отворени.

## 2. МЕТОД НА ТРИАГОЛНИЦИ ЗА РАЗВОЈ

Пристапот кој актуарите најчесто го користат при предвидување на резервите за исплата на штетите од типот на горенаведените се нарекува *метод на триаголници за развој* (Chain Ladder Method). Тој ќе биде претставен во продолжение на овој труд, а ќе биде разгледана и реализација на овој математички модел, врз дадено множество податоци.

Нека со $X_{i,j},\ i = 1, \dots, n; j = 0,1, \dots, n - i$ ги означиме податоците за исплатени или пријавени штети (актуарот решава со кој тип податоци ќе работи), при што $n$ е димензијата на множеството податоци. Се претпоставува дека $n$ периоди по настанувањето на несреќата, штетата не може повеќе да биде пријавена, иако се случила за времетраењето на скаденцата. Притоа, $X_{i,j}$ се податоци во некумулативен облик, кои ни ја претставуваат вкупната вредност на штети настанати во периодот $i$, а исплатени или пријавени $j$ периоди откако се случила штетата. Постојат повеќе триаголници на развој (run-off triangles) со кои се врши развојот на податоците во неживотните осигурувања и скоро во секој од овие методи се користат податоци дадени во кумулативен облик, а таков е случајот и во методот на триаголници на развој. Податоците за исплатени или пријавени штети дадени во кумулативен облик ќе ги означиме со $Y_{i,j}, \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 0,1, \ldots, n - i$, односно

$$Y_{i,j} = \sum_{k=0}^{j} X_{i,k}, \qquad i = 1, \ldots, n; \; j = 0,1, \ldots, n - i. \tag{1}$$

Кумулативните податоци се анализират како матрица, при што податоците кои ни се познати, се членови на горниот триаголник (трапез, во ретките случаи во кои матрицата не е квадратна), додека членовите на долниот триаголник (трапез) не ни се познати и нив треба да ги оцениме. Податоците од долниот триаголник ни претставуваат проектирани кумулативни износи на исплатени или пријавени штети во зависност од тоа со кој тип на податоци сме одбрале да работиме.

Секоја редица на матрицата ни претставува една инцидентна година, односно година во која настанала штетата. Со други зборови, тоа е годината во која е склучена полисата, бидејќи во случај штетата да се случила вон рамките на скаденцата, таа нема да биде предмет на разгледување. Од друга страна, секоја колона претставува една развојна година, односно година во која е пријавена штетата. Ако претпоставиме дека имаме еднаков број инцидентни и развојни години, тогаш познатите податоци за исплатените штети, дадени во некумулативен облик, би можеле да ги запишеме како елементи на квадратна матрица од ред $n = 5$, односно

$$\begin{bmatrix} X_{1,0} & X_{1,1} & X_{1,2} & X_{1,3} & X_{1,4} \\ X_{2,0} & X_{2,1} & X_{2,2} & X_{2,3} & \\ X_{3,0} & X_{3,1} & X_{3,2} & & \\ X_{4,1} & X_{4,2} & & & \\ X_{5,1} & & & & \end{bmatrix}.$$

Доколку со користење на (1), податоците за исплатените штети ги претвориме во кумулативен облик, остатокот од матрицата се пополнува со проектираните исплатени штети $\hat{Y}_{i,j}, i = 2, \dots, n, \quad j = n - i + 1, \dots, n - 1$ дадени во истиот облик, кои може да се предвидат на различни начини претставени во продолжение. Во таков случај, конечниот изглед на матрицата по нејзиното пополнување би бил

$$\begin{bmatrix} Y_{1,0} & Y_{1,1} & Y_{1,2} & Y_{1,3} & Y_{1,4} \\ Y_{2,0} & Y_{2,1} & Y_{2,2} & Y_{2,3} & \hat{Y}_{2,4} \\ Y_{3,0} & Y_{3,1} & Y_{3,2} & \hat{Y}_{3,3} & \hat{Y}_{3,4} \\ Y_{4,0} & Y_{4,1} & \hat{Y}_{4,2} & \hat{Y}_{4,3} & \hat{Y}_{4,4} \\ Y_{5,0} & \hat{Y}_{5,1} & \hat{Y}_{5,2} & \hat{Y}_{5,3} & \hat{Y}_{5,4} \end{bmatrix}.$$

### 2.1. ДЕТЕРМИНИСТИЧКИ ПРИСТАП

Класичната актуарска литература, често го претставува овој метод како чист нумеричко-пресметковен алгоритам за оценување на потребните резерви. По детерминистичкиот пристап ќе го изложиме и стохастичкиот пристап, од каде што впрочем потекнуваат и пресметките во детерминистичкиот пристап.

Детерминистичкиот пристап се заснова на претпоставката дека односот меѓу кумулираниот износ на штети во два последователни периоди е апроксимативно константен, независно од периодот $i$ во кој се случила несреќата. Математички, претпоставуваме дека

$$Y_{i,j+1} \approx Y_{i,j} \cdot f_j, \;\; i = 1, \dots, n; \;\; j = 0,1, \dots, n-1.$$

Коефициентите $f_j$, $j = 0, \dots, n-1$, се нарекуваат *фактори на развој*. Прво, да констатираме дека нам ни се познати само оние податоци $Y_{i,j}$ за кои важи дека $i + j \leq n$, односно елементите на горниот трапез. Да ги означиме со

$$F_{i,j} = \frac{Y_{i,j+1}}{Y_{i,j}}, \quad i = 1, \dots, n-1; \;\; j = 0,1, \dots, n-1-i,$$

*индивидуалните фактори на развој* кои претставуваат количник од два последователни кумулативни податоци во една инцидентна година. Задачата на актуарот е да ги најде оценките $\hat{f}_j$, на факторите на развој $f_j$, $j = 0, \dots, n-1$, земајќи ги предвид познатите податоци $Y_{i,j}$, $i = 1, \dots, n-1-j$, како и индивидуалните фактори на развој $F_{i,j}$ кои можат да се пресметаат со помош на дадените податоци. Наједноставната оценка за факторот на развој $f_j$ која се користи во актуарската литература ([1]) е

$$\hat{f}_j = \frac{1}{n-1-j} \sum_{i=1}^{n-1-j} F_{i,j}, \qquad j = 0, \dots, n-2. \tag{2}$$

Односно, како оценка за факторот на развој во една развојна година се зема аритметичката средина од индивидуалните фактори на развој од таа развојна година. Овој начин на оценување на факторите на развој не е најупотребуван во пракса, бидејќи има низа недостатоци. Како главен недостаток во овој пристап се смета тоа што не се зема предвид дека годините во коишто има штети со највисоки вредности даваат повеќе информации.

Од таа причина, оценката $\hat{f}_j$ на факторот на развој $f_j$ се бара како тежинска или пондерирана средина од познатите податоци во $j$-тата и $(j+1)$-та развојна година. Значи, го бараме количникот од збирот на познатите податоци дадени во кумулативен облик во две последователни развојни години, што математички би се претставило како

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-1-j} Y_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-1-j} Y_{i,j}}, \quad j = 0, \dots, n-2. \tag{3}$$

Откако ќе биде извршена оценка на факторите на развој со помош на некој од горенаведените пристапи (2) или (3), се враќаме на нашата почетна цел, т.е. да ги процениме вредностите на исплатените или резервираните штети во последната колона од матрицата. Проектираните исплатени (или резервирани) штети во последната колона од матрицата се наоѓаат како производ од сите фактори на развој и вредноста на исплатените (или резервираните) штети во последната инцидентна година за која имаме познати податоци. Имено, вредностите $\hat{Y}_{i,n-1}$, $i = 2, \dots, n$ се пресметуваат по формулата

$$\hat{Y}_{i,n-1} = Y_{i,n-i} \cdot \prod_{j=n-i}^{n-2} \hat{f}_j. \tag{4}$$

Всушност, проектираните исплатени (или резервирани) штети во долниот дел од матрицата се пресметуваат по формулата

$$\hat{Y}_{i,j} = Y_{i,n-i} \cdot \prod_{k=n-i}^{j-1} \hat{f}_k, \quad i = 2, \dots, n, \quad j = n-i+1, \dots, n-1. \tag{5}$$

Сумата од IBNR и RBNS резервите кои компанијата треба да ги поседува на денот на правење на извештајот со цел да биде во можност да ги исплати штетите настанати во различните инцидентни години, претставува разлика од проектираните исплатени (или резервирани) штети од последната колона и соодветните елементи од дијагоналата кои ги претставуваат последните познати кумулативни податоци во секоја развојна година. Според тоа, $\hat{R}_i, i = 1,2 \dots, n$ се пресметува како

$$\hat{R}_i = \hat{Y}_{i,n-1} - Y_{i,n-i}. \tag{6}$$

Да забележиме дека $\hat{R}_1 = 0$, бидејќи компанијата не ги исплаќа штетите кои се пријавени $n$ или повеќе години откако се случила несреќата, па затоа резервите за овие штети се еднакви на нула.

**Пример 1**. Нека се дадени следниве податоци за исплатени (ликвидирани штети) во некумулативен облик. Ќе ги најдеме резервите кои треба да ги поседува компанијата на денот на правењето на извештајот за да може да ги исплати штетите во иднина.

| ГОДИНА НА НАСТАН НА ШТЕТАТА | РАЗВОЈНА ГОДИНА | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 01.01.2010 - 31.12.2010 | 75.879.232 | 45.623.145 | 42.311.563 | 28.746.500 | 24.345.333 | 19.874.321 | 10.753.256 |
| 01.01.2011 - 31.12.2011 | 65.983.214 | 47.678.761 | 41.231.235 | 30.956.721 | 25.649.080 | 13.452.321 | |
| 01.01.2012 - 31.12.2012 | 54.632.458 | 47.689.342 | 34.233.441 | 20.987.345 | 14.565.322 | | |
| 01.01.2013 - 31.12.2013 | 45.627.811 | 24.343.212 | 19.321.898 | 15.674.356 | | | |
| 01.01.2014 - 31.12.2014 | 52.458.811 | 37.856.432 | 20.090.761 | | | | |
| 01.01.2015 - 31.12.2015 | 47.893.421 | 24.564.221 | | | | | |
| 01.01.2016 - 31.12.2016 | 34.523.564 | | | | | | |

**Табела 1.** Податоци за исплатени штети во некумулативен облик.

| ГОДИНА НА НАСТАН НА ШТЕТАТА | РАЗВОЈНА ГОДИНА | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 01.01.2010 - 31.12.2010 | 75.879.232 | 121.502.377 | 163.813.940 | 192.560.440 | 216.905.773 | 236.780.094 | 247.533.350 |
| 01.01.2011 - 31.12.2011 | 65.983.214 | 113.661.975 | 154.893.210 | 185.849.931 | 211.499.011 | 224.951.332 | |
| 01.01.2012 - 31.12.2012 | 54.632.458 | 102.321.800 | 136.555.241 | 157.542.586 | 172.107.908 | | |
| 01.01.2013 - 31.12.2013 | 45.627.811 | 69.971.023 | 89.292.921 | 104.967.277 | | | |
| 01.01.2014 - 31.12.2014 | 52.458.811 | 90.315.243 | 110.406.004 | | | | |
| 01.01.2015 - 31.12.2015 | 47.893.421 | 72.457.642 | | | | | |
| 01.01.2016 - 31.12.2016 | 34.523.564 | | | | | | |

**Табела 2.** Податоци за исплатени штети во кумулативен облик.

Познатите вредности ни се податоците за исплатените штети $X_{ij}$, при што имаме 7 инцидентни и развојни периоди, односно години. Со користење на (1) ги пресметуваме податоците дадени во кумулативен облик, при што ја добиваме Табела 2.

Оценувањето на развојните фактори $\hat{f}_i,\ i = 0, \ldots, 5$ ќе биде извршено со користење на пондерираната средина на податоците од две соседни развојни години. Со примена на (3), добиваме

$$\hat{f}_0 = \sum_{i=1}^{6} \frac{Y_{i,1}}{Y_{i,0}} = \frac{570\ 230\ 060}{342\ 474\ 947} = 1{,}66502077.$$

Слично ги добиваме оценките на факторите на развој во останатите развојни години, т.е. $\hat{f}_1 = 1{,}315784668$, $\hat{f}_2 = 1{,}17696076$, $\hat{f}_3 = 1{,}120457839$, $\hat{f}_4 = 1{,}077792413$ и $\hat{f}_5 = 1{,}045414527$.

Користејќи ги добиените оценки на факторите на развој, со користење на (5), ќе го дополниме долниот триаголник во табелата со кумулативни податоци, почнувајќи од последната редица.

Во првата развојната година ќе имаме:

$$\hat{Y}_{7,1} = 34\ 523\ 564 \cdot \hat{f}_0 = 34\ 523\ 564 \cdot 1{,}665027077 = 57\ 482\ 669.$$

Во втората разојната година ќе имаме:

$$\hat{Y}_{7,2} = 34\ 523\ 564 \cdot \hat{f}_0 \cdot \hat{f}_1 = 57\ 482\ 669 \cdot \hat{f}_1 = 75\ 634\ 814.$$

За третата развојна година добиваме:

$$\hat{Y}_{7,3} = 34\ 523\ 564 \cdot \hat{f}_0 \cdot \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2 = 75\ 634\ 814 \cdot \hat{f}_2 = 89\ 019\ 209.$$

На сличен начин се пополнува целата табела.

| ГОДИНА НА НАСТАН НА ШТЕТАТА | РАЗВОЈНА ГОДИНА | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 01.01.2010 - 31.12.2010 | 75.879.232 | 121.502.377 | 163.813.940 | 192.560.440 | 216.905.773 | 236.780.094 | 247.533.350 |
| 01.01.2011 - 31.12.2011 | 65.983.214 | 113.661.975 | 154.893.210 | 185.849.931 | 211.499.011 | 224.951.332 | 235.167.390 |
| 01.01.2012 - 31.12.2012 | 54.632.458 | 102.321.800 | 136.555.241 | 157.542.586 | 172.107.908 | 185.496.598 | 193.920.838 |
| 01.01.2013 - 31.12.2013 | 45.627.811 | 69.971.023 | 89.292.921 | 104.967.277 | 117.611.408 | 126.760.684 | 132.517.460 |
| 01.01.2014 - 31.12.2014 | 52.458.811 | 90.315.243 | 110.406.004 | 129.943.534 | 145.596.252 | 156.922.536 | 164.049.098 |
| 01.01.2015 - 31.12.2015 | 47.893.421 | 72.457.642 | 95.338.654 | 112.209.855 | 125.726.412 | 135.506.973 | 141.660.958 |
| 01.01.2016 - 31.12.2016 | 34.523.564 | 57.482.669 | 75.634.814 | 89.019.209 | 99.742.270 | 107.501.462 | 112.383.590 |

**Табела 3.** Податоците на проектираните исплатени штети се најдени со помош на фактори на развој пресметани со (3).

За да ги процениме резервите за секоја година на настан на штетите, на денот кога се прави извештајот (31.12.2016) потребно е вредностите од последната колона во Табелата 3 да ги одземеме од вредностите по споредната дијагонала (правоаголничињата означени со задебелени линии), т.е. да ја користиме формулата (6). Како што кажавме и претходно, резервите $\hat{R}_1$ кои треба да ги планираме денес за исплата на штетите кои настанале во периодот од 1.01.2010 до 31.12.2010 ќе бидат еднакви на нула, поради тоа што $n = 7$ периоди по несреќата не е дозволено да се бара отштета за неа.

$$\hat{R}_2 = 235\,167\,390 - 224\,951\,332 = 10\,216\,058.$$

Овој резултат ни дава до знаење дека на 31.12.2016 компанијата треба да има резерви од 10 216 058, за исплата на штетите кои настанале во периодот од 01.01.2011 до 31.12.2011. На 31.12.2016 компанијата треба да има резерви од 21 812 930 за исплата на штетите настанати меѓу 01.01.2012 и 31.12.2012, т.е.

$$\hat{R}_3 = 193\,920\,838 - 172\,107\,908 = 21\,812\,930.$$

По спроведената постапка, добиваме дека $\hat{R}_4 = 27\,550\,183$, $\hat{R}_5 = 53\,643\,094$, $\hat{R}_6 = 69\,203\,316$ и $\hat{R}_7 = 77\,860\,026$.

Ако сумираме, добиваме дека вкупните резерви (RBNS+IBNR) кои компанијата треба да ги поседува на 31.12.2016 се еднакви на

$$\hat{R} = \hat{R}_1 + \hat{R}_2 + \hat{R}_3 + \hat{R}_4 + \hat{R}_5 + \hat{R}_6 + \hat{R}_7 = 260\,285\,608.$$

Доколку факторите на развој ги оцениме како аритметичка средина од индивидуалните фактори на развој со користење на (2), ќе добиеме резерви кои не се разликуваат премногу од оние добиени со користење на пондерираната средина, односно со примена на (3). Тие се прикажани во Табела 4.

| ГОДИНА НА НАСТАН НА ШТЕТАТА | РАЗВОЈНА ГОДИНА | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 01.01.2010 - 31.12.2010 | 75.879.232 | 121.502.377 | 163.813.940 | 192.560.440 | 216.905.773 | 236.780.094 | 247.533.350 |
| 01.01.2011 - 31.12.2011 | 65.983.214 | 113.661.975 | 154.893.210 | 185.849.931 | 211.499.011 | 224.951.332 | 235.167.390 |
| 01.01.2012 - 31.12.2012 | 54.632.458 | 102.321.800 | 136.555.241 | 157.542.586 | 172.107.908 | 185.466.164 | 193.889.022 |
| 01.01.2013 - 31.12.2013 | 45.627.811 | 69.971.023 | 89.292.921 | 104.967.277 | 117.454.619 | 126.570.928 | 132.319.087 |
| 01.01.2014 - 31.12.2014 | 52.458.811 | 90.315.243 | 110.406.004 | 129.853.220 | 145.301.097 | 156.578.727 | 163.689.676 |
| 01.01.2015 - 31.12.2015 | 47.893.421 | 72.457.642 | 94.834.721 | 111.539.169 | 124.808.330 | 134.495.402 | 140.603.447 |
| 01.01.2016 - 31.12.2016 | 34.523.564 | 57.336.810 | 75.044.125 | 88.262.603 | 98.762.688 | 106.428.212 | 111.261.598 |

**Табела 4.** Податоците на проектираните исплатени штети се најдени со помош на фактори на развој пресметани со (2).

Вкупните резерви кои компанијата треба да ги поседува на 31.12.2011 се еднакви на 257 516 494.

Постојат случаи во кои разликата на висината на одредени штети и преостанатите штети е многу голема, па тие можат да нѐ одведат во погрешна насока при пресметувањето на аритметичката или пондерираната средина за потребите на оценувањето на факторите на развој. Од таа причина, со цел да не добиеме искривена слика за потребните резерви кои треба да ги поседува компанијата, овие податоци се отстрануваат при оценувањето на факторите на развој.

## 2.2. СТОХАСТИЧКИ ПРИСТАП

Како надополнување на детерминистичкиот пристап во кој наоѓаме единствена вредност на оценувачот на резервите, го приложуваме и стохастичкиот пристап на овој метод. Методот на триаголници на развој најчесто се разгледува како детерминистички метод за оценување на резервите потребни за покривање на настанатите штети во областа на осигурувањето. Тогаш се поставува прашањето: која е потребата од стохастичкиот пристап? Најосновната работа при оценувањето на резервите во детерминистичкиот пристап е наоѓањето на оценката за факторите на развој. Но, која е мотивацијата која водела до користење на оценките разгледани претходно? Дали е оправдана нивната употреба? Одговорот на овие прашања ќе биде добиен по разгледувањето на стохастичкиот пристап на методот на триаголници за равој.

Со години се поставувало прашањето за тоа кој стохастички модел лежи во основата на методот на триаголници за развој. Некои актуари применувале логаритамско-линеарна апроксимација на методот на триаголници за развој, со цел да ја измерат променливоста на оценетите потребни резерви. Иако, разликите во резултатите добиени од детерминистичкиот метод и неговата логаритамско-линеарна апроксимација биле забележителни, сепак актуарите и оваа апроксимација ја сметале за метод на триаголници за развој. Томас Мек (Thomas Mack), во [2], успеал да ги побие нивните тврдења и покажал дека стохастичкиот модел кој лежи во основата на методот на триаголници за развој е distribution-free метод, односно метод кај кој нема претпоставка за распределбата на податоците, т.е. метод кој важи за која било распределба на податоците.

Методот на триаголници за развој се состои од оценување на факторите на развој со $f_j$ со помош на Еткинсоновата оценка:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-1-j} Y_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-1-j} Y_{i,j}}, \quad j = 0, \dots, n-2,$$

и оценување на вредностите на штетите во последната година на исплата со

$$\hat{Y}_{i,n-1} = Y_{i,n-1} \cdot \hat{f}_{n-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-2}, \qquad i = 2, \dots, n.$$

Стохастичкиот модел е основан на три претпоставки кои ги поставил Томас Мек во [2], кои се однесуваат на математичкото очекување, дисперзијата и независноста на секоја од редиците, односно инцидентите години. Основната претпоставка која се користи во методот на триаголници за развој е:

**Претпоставка 1.** *Постојат фактори на развој $f_j, j = 0,1, \dots, n-2$ за кои важи дека*

$$E\left(Y_{i,j+1} | Y_{i,0}, \dots, Y_{i,j-1}, Y_{i,j}\right) = Y_{i,j} \cdot f_{i,j}, \text{за } i = 1, \dots, n,; \ j = 0, \dots, n-1. \quad (3)$$

Бидејќи детерминистичкиот алгоритам на методот на триаголници за развој не зема предвид никакви зависности меѓу годините на настан на штетата, била поставена следната претпоставка за променливите $Y_{i,j}$ од различните инцидентни години.

**Претпоставка 2.** $\{Y_{i_1,0}, Y_{i_1,1}, \dots, Y_{i_1,n-1}\}$ *и* $\{Y_{i_2,0}, Y_{i_2,1}, \dots, Y_{i_2,n-1}\}$ *се независни, односно неколерирани.*

Математичката интерпретација на оваа претпоставка е дека за сите $i_1 \neq i_2$, важи дека $\operatorname{cov}\left(Y_{i_1,j}, Y_{i_2,j}\right) = 0$. Во пракса, независноста помеѓу годините на настан на штетата може да биде нарушена, доколку компанијата се реши да направи драстични промени во поглед на проценувањето на штетите и нивното резервирање.

Следната теорема ни потврдува дека Претпоставките 1 и 2 навистина се имплицитни претпоставки во методот на триаголници за развој.

**Теорема 1.** ([2]) *Нека $C = \{Y_{i,j} | i + j \leq n\}$ е множеството од сите познати односно набљудувани податоци. Од претпоставката 1 и од претпоставката 2, следува дека*

$$E\left(Y_{i,n-1}\right) = Y_{i,n-i} \cdot f_{n-i} \cdot f_{n-i+1} \cdot \dots \cdot f_{n-2}.$$

**Доказ.** Нека $E_i(X) = E(X|Y_{i,0}, \dots, Y_{i,n-i})$. Со последователно користење на Претпоставката 2, а потоа и на Претпоставката 1, добиваме:

$$E\left(Y_{i,n-1}\middle|C\right) = E_i\left(Y_{i,n-1}\right) = E_i\left(E\left(Y_{i,n-1}\middle|Y_{i,0}, \dots, Y_{i,n-2}\right)\right) = E_i\left(Y_{i,n-2} \cdot f_{n-2}\right) =$$
$$= E_i\left(Y_{i,n-2}\right) \cdot f_{n-2} = \cdots = E_i\left(Y_{i,n-i}\right) \cdot f_{n-i} \cdot \dots \cdot f_{n-2} = Y_{i,n-i} \cdot f_{n-i} \cdot \dots \cdot f_{n-2}.$$

Теоремата 1 ни покажува дека оценувачот $\hat{Y}_{i,n-1}$ има иста форма како и условното математичко очекување $E\left(Y_{i,n-1}\middle|C\right)$ кое го дава најдоброто предвидување за $Y_{i,n-1}$, основано на податоците $C$. Следната теорема ни покажува дека оценувањето на $f_{n-i-1} \cdot \cdots \cdot f_{n-2}$ со оценувачите $\hat{f}_{n-i-1} \cdot \cdots \cdot \hat{f}_{n-2}$ е навистина разумна процедура.

**Теорема 2.** ([2]) *Под претпоставките 1 и 2, оценувачите $\hat{f}_j$ , за $j = 0,1, \dots, n-2$, се непристрасни и некорелирани.*

**Доказ.** Нека $B_k = \left\{Y_{i,j}\middle|j \le k, i + j \le n\right\}$ за $i = 0,1, \dots, n-2$. Со користење на Претпоставката 2, а потоа на Претпоставката 1, имаме

$$E\left(Y_{i,k+1}\middle|B_k\right) = E_i\left(Y_{i,k+1}\middle|Y_{i,0}, \dots, Y_{i,k}\right) = Y_{i,k} \cdot f_k.$$

Понатаму, имаме

$$E\left(\hat{f}_k\middle|B_k\right) = \frac{\sum_{j=0}^{n-k-1} E(Y_{j,k+1}|B_k)}{\sum_{j=0}^{n-k-1} Y_{j,k}} = f_k,$$

од каде што директно следува непристрасноста на оценувачот $\hat{f}_k$, бидејќи $E\left(\hat{f}_k\right) = E\left(E\left(\hat{f}_k\middle|B_k\right)\right) = f_k$. За $j < k$, оценувачот $\hat{f}_k$ е некорелиран, бидејќи

$$E\left(\hat{f}_j \cdot \hat{f}_k\right) = E\left(E\left(\hat{f}_j \cdot \hat{f}_k\middle|B_k\right)\right) = E\left(\hat{f}_j \cdot E\left(\hat{f}_k\middle|B_k\right)\right) =$$
$$= E\left(\hat{f}_j\right) \cdot f_k = E\left(\hat{f}_j\right) \cdot E\left(\hat{f}_k\right). \quad \Box$$

Некорелираноста на оценувачите $\hat{f}_k$ е изненадувачка, бидејќи $\hat{f}_{k-1}$ и $\hat{f}_k$ зависат од исти податоци $Y_{0,k}, \dots, Y_{n-k,k}$. Доказот за некорелираност може да се прошири на произволен производ од оценувачи $\hat{f}_k$, односно $E\left(\hat{f}_{n-i} \cdot \cdots \cdot \hat{f}_{n-2}\right) = f_{n-i} \cdot \cdots \cdot f_{n-2}$. Одовде, следува дека $\hat{Y}_{i,n-1} = Y_{i,n-i} \cdot \hat{f}_{n-i} \cdot \cdots \cdot \hat{f}_{n-2}$ претставува непристрасен оценувач за $E\left(Y_{i,n-1}\middle|C\right) = Y_{i,n-i} \cdot f_{n-i} \cdot \cdots \cdot f_{n-2}$. Слично, оценувачот на резервите $\hat{R}_i = \hat{Y}_{i,n-1} - Y_{i,n-i}$ е непристрасен оценувач за вистинските резерви $R_i = Y_{i,n-1} - Y_{i,n-i}$.

**Претпоставка 3.** *За дисперзијата (варијансата) важи дека*

$$D\left(Y_{i,j+1} \middle| Y_{i,0},\dots,Y_{i,j-1},Y_{i,j}\right) = Y_{i,j}\cdot\sigma_j^2, \qquad i = 0,1,\dots,n; j = 0,\dots,n-1,$$

*каде што* $\sigma_j^2$*,* $j = 0,1,\dots,n-1$ *се непознати параметри.*

Токму оваа претпоставка за дисперзијата ја имплицира основата за детерминистичкиот метод на триаголници за развој. Трите претпоставки ќе ги запишеме во еден линеарен модел. За секој развоен период $j = 0,1,\dots,n-1$ имаме

$$Y_{i,j+1} = Y_{i,j}\cdot f_j + \varepsilon_j, i = 1,\dots,n,$$

каде што за $\varepsilon_j$ важи дека $E\left(\varepsilon_j|Y_i(j)\right) = 0$ и $D\left(\varepsilon_j|Y_i(j)\right) = Y_{i,j}\cdot\sigma_j^2$, при што $Y_i(j) = (Y_{i,0},\dots,Y_{i,j})$. Овој линеарен модел ни претставува дека случајните променливи $Y_{i,j+1}$ зависат од детерминистичкиот линеарен дел $Y_{i,j}\cdot f_j$, меѓутоа за разлика од детерминистичкиот пристап на методот на триаголници за развој, во стохастичкиот го разгледуваме и стохастичкиот собирок $\varepsilon_j$. Тој претставува случајна осцилација околу детерминистичкиот дел, од причина што $E\left(\varepsilon_j|Y_i(j)\right) = 0$.

Кога разгледуваме случај со само една случајна променлива, тогаш не ни е потребен оценувач за $\sigma_j^2$ при оценувањето на $f_j$, но затоа оценувачот $\hat{\sigma}_j^2$ ни е потребен за да се најде средно-квадратната грешка $MSE\left(\hat{R}_i\right)$ за оценувачите $\hat{R}_i$ на соодветните резерви $R_i$. Оваа средно-квадратна грешка ни претставува само еден од начините да се измери колкава е разликата меѓу вредностите имплицирани од оценувачите $\hat{R}_i$ и соодветните вредности на вистинските резерви $R_i$. Таа ќе ни помогне да дојдеме до некој заклучок во однос на грешката при проценувањето на резервите кои ни се потребни во овој момент за исплата на штетите во иднина.

Со директна замена на оценувачот $\hat{f}_j$ во $D\left(\varepsilon_j\right) = Y_{i,j}\cdot\sigma_j^2$, Томас Мек ја добил следната формула за $\hat{\sigma}_j^2$ ([1]):

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1}\sum_{i=1}^{n-j-1}\left(Y_{i,j}\cdot\left(\frac{Y_{i,j+1}}{Y_{i,j}} - \hat{f}_j\right)^2\right),$$

и за $j = 0,1,\dots,n-2$, $\hat{\sigma}_j^2$ е непристрасен оценувач за $\sigma_j^2$.

**Теорема 3.** ([2]) *Под претпоставките 1, 2 и 3, оценувачот* $\widehat{MSE}\left(\hat{R}_i\right)$ *на средно-квадратната грешка* $MSE\left(\hat{R}_i\right)$ *е:*

$$\widehat{MSE}(\hat{R}_i) = (\hat{Y}_{i,n-1})^2 \cdot \sum_{j=n-i}^{n-2} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j}\left(\frac{1}{\hat{Y}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} Y_{k,j}}\right), \qquad i = 2, \dots, n.$$

Квадратниот корен на оценувачот на средно-квадратната грешка претставува стандардна грешка на $\hat{R}_i, i = 2, \dots, n$. Честопати, тема на разгледување е и стандардната грешка на целокупниот оценувач на резервите $\hat{R} = \hat{R}_2 + \cdots + \hat{R}_n$. Во овој случај, таа не може да биде пресметана со сумирање на стандардните грешки на $\hat{R}_i, i = 2, \dots, n$, бидејќи тие се корелирани преку познатите оценувачи $\hat{f}_j$ и $\hat{\sigma}_j^2$. Начинот на кој можеме да ја пресметаме стандардната грешка на целокупниот оценувач на грешките е претставен во [3].

## ЛИТЕРАТУРА


[1] P. Jedlicka, *Recent developments in claims reserving*, WDS'06 Proceedings of contributed papers, Part I, (2006) 118 – 123.

[2] T. Mack, *Distribution-free calculations of the standard error of chain ladder reserve estimates*, Astin Bulletin, 23(2) (1993), 213 – 225.

[3] M. V. Wuthrich, M. Merz, *Stohastic claims reserving methods in non-life insurance*, John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, 2006.



[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет
Институт за математика
ул. Архимедова бр.3, 1000 Скопје, Р. Македонија
*e-mail*: mdimovski16@gmail.com



Примен: 27.02.2017
Поправен: 25.03.2017
Одобрен: 03.04.3017