

МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ НА ФРАНЦУСКИОТ ПАРАДОКС

*Кристина Новковска*¹*Марко Димовски*²

Причините за појавување на кардиоваскуларните болести кај луѓето претставуваат плодна тема на разговор во секојдневниот живот. Но, уште поинтересна е потрагата по причините кои може да доведат до намалување на веројатноста да заболеме од наведениот тип болести. Честопати сме се сретнале со најразни статии во кои виното е наведено како причина за намалување на ризикот од срцеви заболувања, но логично е да се запрашаме дали консумацијата на вино може да предизвика друг вид болести во човековото тело? Токму прашањето за тоа колкаво количество вино би требало да се конзумира секој ден без да се загрози сопственото здравје е главна тема на овој труд. Врз основа на различни епидемиолошки истражувања, создаден е терминот „француски парадокс“, кој ќе биде дефиниран во продолжение, а потоа ќе биде моделиран на веројатносен математички начин со цел да се добие одговор на разгледуваниот проблем.

1. ДЕФИНИРАЊЕ НА ТЕРМИНОТ ФРАНЦУСКИ ПАРАДОКС

Француски парадокс како термин се сретнува во неколку епидемиолошки истражувања ([4]), на тема корелирање на степенот на кардио-васкуларни заболувања во однос на културата на исхрана во различни земји во светот. Медицински е докажано дека хранењето со производи богати со заситени масти од типот на млечни производи, јајца или црвено месо, предизвикуваат затнување на крвните садови со што се отежнува работата на срцето и белите дробови. Па, ваквиот начин на исхрана може да предизвика најразни срцеви и белодорбни заболувања. Резултатите од истражувањата по ова прашање на територијата на Франција се покажале парадоксални, односно тие биле контрадикторни во однос на утврдените медицински констатации. Широката употреба на путерот при секојдневното приготвување на храната како и високо развиената индустрија на производство на најразлични видови сирење, не само што ги прави Французите големи гурмани кога е во прашање храната, туку води кон заклучок дека француската култура на исхрана вклучува секој-

дневно внесување храна збогатена со високо заситени масти. Согласно со медицинските констатации се очекува дека ваквиот стил на исхрана би предизвикал висока стапка на заболени од кардиоваскуларни болести, како и голема стапка на смртност. Сепак, епидемиолошките истражувања не ја потврдуваат оваа хипотеза.

Со податоците добиени во проектот „MONICA“ (објавени во [4]), кој претставува светски систем за мониторинг на кардиоваскуларните заболувања организиран од Светската здравствена организација (WHO) во 1992 година, претставена е корелацијата меѓу културата на исхрана во различни земји, односно на секојдневното количество внесени заситени масти и стапката на смртност од кардиоваскуларни болести (Слика 1.). Од Слика 1, лесно може да се забележи дека таа корелација е правопрпорционална и повеќето земји се наоѓаат блиску до правата на регресија, но тоа не е случајот и со Франција. Резултатите од ова истражување биле доволна причина да се создаде терминот „францускиот парадокс“. Ситуацијата е уште повеќе парадоксална ако се земе предвид дека и другите фактори кои придонесуваат за појавување кардиоваскуларни болести како што се високиот крвен притисок, пушењето цигари или индексот на телесна маса, воопшто не се ретки во Франција, споредено со останатите земји слични на неа. Тешко било да се даде соодветно објаснување за оваа појава во Франција, меѓутоа со помош на понатамошни истражувања била поставена најверојатната причина која води до појавувањето на овој парадокс. Секојдневната консумација на вино!

1.1. ЦРВЕНОТО ВИНО КАКО ЕДНА ОД ПРИЧИНИТЕ ЗА ФРАНЦУСКИОТ ПАРАДОКС

Навиките во исхраната кои спречуваат кардиоваскуларни болести се разликуваат во различни региони на Франција, но еден факт е конзистентен – Французите од сите региони секојдневно консумираат големо количество вино. Овој заклучок се сретнува и во други извештаи за обратнопропорционалната врска меѓу консумацијата на алкохол и заболувањето од срцеви болести во развиените земји, на што особено се придава значење на консумацијата на црвено вино.

Математички модел на францускиот парадокс



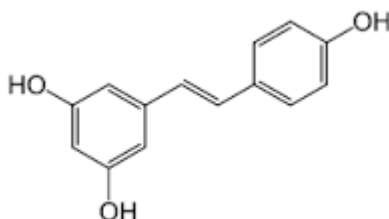
Слика 1. Резултатите од истражувањето „MONICA“ направено во 1992 година ([4]).

Во 1986 година, во САД бил спроведен експеримент на повеќе од 51 000 машки испитаници ([6]) и неговите резултати ја потврдуваат хипотезата дека умерената консумација на алкохол (30-50 g дневно) го намалува ризикот од кардиоваскуларни болести. Доколку алкохолот е единствената причина за овој парадокс, тогаш сите алкохолни пијалаци, конзумирани умерено, би требало да влијаат позитивно во превенцијата од појава на кардиоваскуларните болести, но тоа не е случај. Истражувањата покажале дека виното, особено црвеното, има поголем позитивен ефект од сите други алкохолни пијалаци ([2]). Причината за оваа појава се наоѓа во компонентите на хемискиот состав на црвеното вино, претставени во Табела 1. Да напомене дека ова е просечната процентна застапеност на дадените компоненти во хемискиот состав на виното, меѓутоа процентите можат да варираат со мала девијација во однос на просекот, во зависност од различните видови црвени вина.

Компонента	Учество изразено во %
Вода	86
Етанол	12
Глицерол	1
Органски киселини	0,4
Фенолни соединенија	0,1
Други компоненти	0,5

Табела 1. Хемиски состав на црвеното вино.

Тоа што го прави црвеното вино посебно и различно од останатите алкохолни пијалаци е присуството на фенолни соединенија. Фенолните соединенија се огромна класа на секундарни метаболити кај растенијата со најразлични едноставни и сложени хемиски структури. Примарно, тие се важни за давање на бојата и аромата на плодовите. Исто така, тие се одговорни за аstringентноста на одредени овошја и зеленчуци, што се смета за еден вид одбранбен механизам. Сепак, тоа што е најважно од аспект на нашето истражување, се смета дека овие соединенија придонесуваат за здравјето на нивните консументи ([1]). Механизмот на нивното дејствување е предмет на истражување во академскиот свет и сè уште не е детално објаснет, иако некои податоци укажуваат дека тоа може да се должи на нивната антиоксидантна моќ. Од многуте фенолни соединенија што ги содржи виното, ресвератролот се појавува како најважен во спречувањето на кардиоваскуларни болести. Виното е главен извор на ова соединение, а истражувањата направени на ова поле даваат различни резултати за тоа дали навистина помага во заштита на крвниот систем на човекот или не.



Слика 2. Структурна формула на ресвератролот.

Црвеното вино ја намалува веројатноста од појава на кардио-васкуларни болести, но секоја негова прекумерна употреба може да доведе до други проблеми, како што е појавата на болести на црниот дроб. Но, колкаво е тоа умерено количество кое треба да се консумира секојдневно? Одговорот ќе го најдеме во математичкиот модел на „францускиот парадокс“.

2. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ

Во продолжение ќе биде претставена оценката за количеството на црвено вино кое може да се консумира секојдневно, со цел да не заштити од појава на кардиоваскуларни заболувања, но истовремено да не предизвика појава на болести на црниот дроб. Врз основа на податоците добиени од проектот „MONICA“ ([4]) се доаѓа до заклучокот дека веројатноста p да заболеме од кардиоваскуларни заболувања се намалува експоненцијално (односно по принципот на геометриската прогресија) со зголемувањето на количеството x на црвено вино (изразена во литри) која се консумира секојдневно ([3],[5]), согласно со законот:

$$p(x) = p_0 e^{-\frac{x}{x_p}}, \quad x \geq 0,$$

каде што:

- p_0 претставува веројатноста лице кое не консумира црвено вино да заболети од кардиоваскуларни болести (всушност, p_0 е константа која ја претставува вредноста $p(0)$).
- $-\frac{1}{x_p}$ претставува стапка на намалување на веројатноста да заболеме од кардиоваскуларна болест со зголемување на количината на црвено вино која се консумира секојдневно, односно

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{x_p} p.$$

Емпириски е покажано дека вредноста $x_p > 0$, најчесто се зема да биде еднаква на 1.

Да забележиме дека првиот извод на функцијата $p(x)$ во $x \geq 0$ е

$$p'(x) = -\frac{1}{x_p} p(x) < 0,$$

т.е. дека функцијата $p(x)$ е монотono опаѓачка.

При поставувањето на математичкиот модел на „францускиот парадокс“, користен е моделот на Малтус, чија примена е конструирана на веројатносен начин. Во основата на Малтусовиот модел лежи промената на популацијата во зависност од времето. Имено, Томас Роберт Малтус покажал дека популацијата расте експоненцијално со текот на времето, според законот

$$P(t) = P_0 e^{rt},$$

каде што P_0 е големината на популацијата во почетниот момент на истражување, t го претставува времето, додека r е стапката на пораст на популацијата, параметар кој често го нарекуваме и Малтусов параметар.

Овој модел наоѓа широка примена, па затоа ќе биде искористен и при моделирањето на веројатноста q , односно веројатноста да се предизвика болест на црниот дроб со зголемување на количеството црвено вино кое се консумира секојдневно. Имено, ризикот за појавување на болест на црниот дроб со зголемување на количеството x на црвено вино (изразено во литри) консумирано во еден ден, се зголемува експоненцијално ([3], [5]) во согласност со законот:

$$q(x) = q_0 e^{\frac{x}{x_q}}, \quad x \geq 0,$$

каде што:

- q_0 е веројатноста едно лице кое не консумира вино да заболи од болест на црниот дроб ($q_0 = q(0)$).
- $\frac{1}{x_q}$ претставува стапка на зголемување на веројатноста да биде предизвикано заболување на црниот дроб со зголемување на количеството црвено вино кое се консумира секојдневно, т.е.

$$\frac{dq}{dx} = \frac{1}{x_q} q.$$

За константата x_q на емпириски начин е добиена вредноста 3. Да напоменеме дека вредностите кои најчесто се земаат за константите x_p и x_q важат за сите популации. Интересна е легендата која само ја потврдува емпирииската вредност за константата x_q . Таа е поврзана со цуцето Percheo кое живеело во замокот во Хајделберг, Германија. Во истиомениот замок се наоѓа најголемото буре за вино со димен-

зии од 7 метри висина и 8 метри ширина. Жителите на овој замок вообичаено консумирале по 2 литри вино на ден, додека цуцето консумирало по 6 литри. Еден ден Percheo загубил облог и како резултат на тоа, требало да консумира две чаши вода, по што починал. Останало недокажано дали починал од болест на црниот дроб предизвикана од претераната консумација на црвено вино или од водата која во тоа време била загадена, меѓутоа вредноста на x_q се зема како количник од литрите на црвено вино кои цуцето ги консумирало во еден ден и литрите кои ги консумирал еден просечен жител на замокот ([3]).

Математичкиот модел на „францускиот парадокс“, го добиваме со сумирање на функциите $p(x)$ и $q(x)$, односно веројатноста да заболеме од кардиоваскуларна болест или болест на црниот дроб, во однос на количеството на консумирано вино во еден ден, кој приближно се менува според законот (1):

$$r(x) \approx p(x) + q(x) = p_0 e^{-\frac{x}{x_p}} + q_0 e^{\frac{x}{x_q}}, \quad x \geq 0. \quad (1)$$

Всушност, функцијата $r(x)$ претставува оценка за оваа веројатност ([3]). Првиот извод на функцијата пресметан во $x \geq 0$ е

$$r'(x) = -\frac{1}{x_p} e^{-\frac{x}{x_p}} + \frac{1}{x_q} e^{\frac{x}{x_q}}$$

Со решавање на равенката $r'(x) = 0$, како единствено решение кое е кандидат за екстремна вредност добиваме

$$x^* = \frac{x_p x_q}{x_p + x_q} \left(\ln \left(\frac{x_q}{x_p} \right) + \ln \left(\frac{p_0}{q_0} \right) \right). \quad (2)$$

Да забележиме дека $r(0) = p_0 + q_0$ и $\log_{x \rightarrow \infty} r(x) = \infty$. Функцијата монотонно опаѓа за сите $0 \leq x < x^*$, а монотонно расте за вредностите поголеми од x^* , па поради тоа x^* е вредноста во која функцијата $r(x)$ го достигнува својот глобален минимум.

Природна е претпоставката дека веројатностите p_0 и q_0 се приближно еднакви, па така $\frac{p_0}{q_0} \approx 1$, односно, $\ln \left(\frac{p_0}{q_0} \right) \approx 0$.

Така, функцијата $r(x)$ го достигнува својот глобален минимум во

$$x^* = \frac{x_p x_q}{x_p + x_q} \ln \left(\frac{x_q}{x_p} \right). \quad (3)$$

Следниов пример е најспоменуван во соодветната литература.

Пример 1. ([3]) Да се пресмета препорачаното количество црвено вино (изразено во литри) кое треба да се консумира секојдневно, ако вредностите на константите x_p и x_q во (1) се најчесто користените вредности 1 и 3, соодветно, додека веројатностите p_0 и q_0 се $p_0 = 0,2$ и $q_0 = 0,25$.

Со замена на овие вредности во (2), како оптимално решение добиваме $x^* \approx 0,656$, па, ова количество на црвено вино изразено во литри е најпрепорачливо да се консумира секојдневно за да ја намалиме веројатноста од заболување од кардиоваскуларни болести и истовремено да не предизвикаме болест на црниот дроб.

Забележавме дека функцијата (1) тежнее кон бесконечност за доволно големи вредности на x . Бидејќи функцијата (1) претставува веројатност за реализација на настанот „појавување на кардиоваскуларна болест или болест на црниот дроб“, нејзиното множество вредности мора да биде во интервалот $[0,1]$. Од таа причина, нејзината вредност ќе ја заокружиме на 1 за оние вредности на x за кои важи дека $r(x) > 1$.

x	r(x)	x	r(x)	x	r(x)
0,55	0,415694	0,73	0,415255	4,04	0,964667
0,56	0,415548	0,74	0,415361	4,05	0,967841
0,57	0,415417	0,75	0,41548	4,06	0,971026
0,58	0,415301	0,76	0,415611	4,07	0,974222
0,59	0,4152	0,77	0,415756	4,08	0,97743
0,60	0,415113	0,78	0,415914	4,09	0,980648
0,61	0,41504	0,79	0,416084	4,10	0,983878
0,62	0,414982	0,80	0,416267	4,11	0,987119
0,63	0,414938	0,81	0,416463	4,12	0,990372
0,64	0,414908	0,82	0,416671	4,13	0,993635
0,65	0,414892	0,83	0,416892	4,14	0,99691
0,66	0,414889	0,84	0,417125	4,15	1
0,67	0,414901	0,85	0,41737	4,16	1
0,68	0,414926	0,86	0,417627	4,17	1
0,69	0,414965	0,87	0,417897	4,18	1
0,70	0,415018	0,88	0,418179	4,19	1
0,71	0,415084	0,89	0,418473	4,20	1

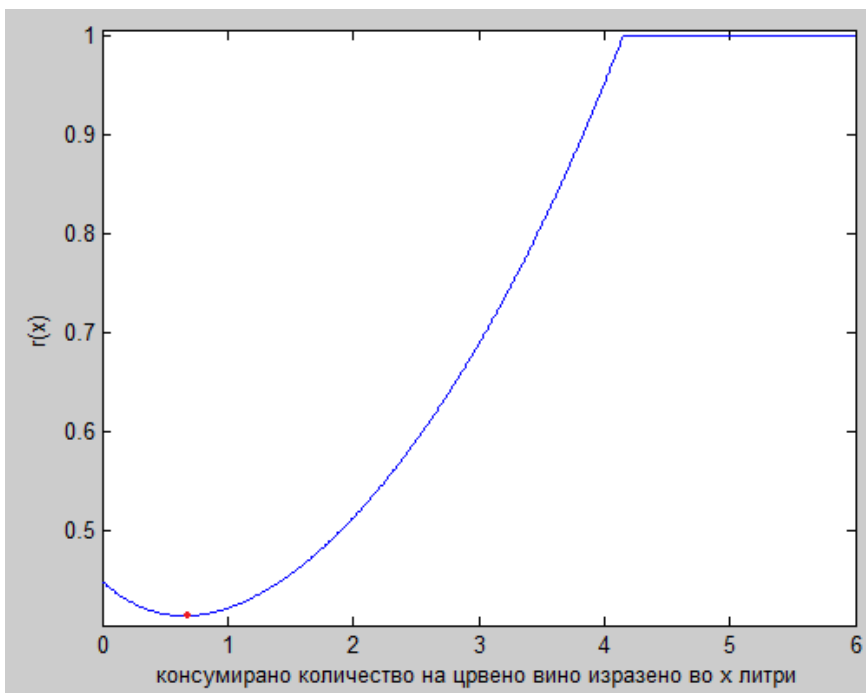
Табела 2. Дел од вредностите на $r(x)$.

Во Табела 2 се покажани дел од вредностите на функцијата $r(x)$, добиени со реализација на податоците од Пример 1, при што

Математички модел на францускиот парадокс

стапката на промена на количеството на црвено вино изразено во литри изнесува 0,01.

На Слика 3 е прикажана веројатноста r за заболување од една од дадените болести, во зависност од количеството на конзумирано црвено вино, x :



Слика 3. Графикот на функцијата $r(x)$.

Можеме да забележиме дека за вредностите за x поголеми од 4,14, вредноста на функцијата $r(x)$ се заокружува на 1. Односно, врз основа на дадените податоци, скоро сигурно би заболеле од кардиоваскуларна болест или болест на црниот дроб доколку секојдневно конзумираме црвено вино во количини поголеми од 4,14 l.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V.Cheyrier, *Phenolic compounds: from plants to foods*, *Phytochemistry Reviews* 11(2) (June 2012), 153 – 177.
- [2] L.A.Friedman, A.W.Kimball, *Coronary heart disease mortality and alcohol consumption in Framingham*, *Am J Epidemiol*, 124(3) (1986), 481 – 489.

- [3] S.D.Marchi, *Mathematics and wine*, Applied Mathematics and Computation, 192, (2007), 180 – 190.
- [4] S.Renaud, M.D.Lorgeril, *Wine, Alcohol, Platelets, and the French Paradox for Coronary Heart Disease*, The Lancet, 339, (1992), 1523 – 1526.
- [5] A.Rigamonti, A.A.Varlamov, *Nunc est Bibendum: Divertissement di Fisici attorno a bicchieri di vino*, Il Nuovo Saggiatore, (January 2004).
- [6] E.B.Rimm, E.L.Giovannucci, W.C.Willett, G.A.Colditz, A.Ascherio, B.Rosner, M.J.Stampfer, *Prospective study of alcohol consumption and risk of coronary disease*, Lancet, 338, (August 1991), 464 – 468.

¹ Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Технолошко металуршки факултет,
ул. Руѓер Бошковиќ бр.16, 1000 Скопје, Р. Македонија

² Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет,
Институт за математика
ул. Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија

e-mail: kristina.novkovska@gmail.com

e-mail: mdimovski16@gmail.com

Примен: 25.03.2017

Поправен: 10.07.2017

Одобен: 11.07.2017