М-АСОЦИЈАТИВИ ВО КОИ НЕКОИ ЛЕВИ ИДЕАЛИ СЕ М-ПОДГРУПИ

Год. збор. ПМФ Скопје, 22 (1972), 39–49

Целта на оваа работа е да се даде опис на класата асоцијативи определена со насловот, а со тоа се обопштуваат резултатите од работите [1] и [6]. Прво се изнесуваат неопходните претходни дефиниции и формулира главниот резултат на работава, а потоа истиот докажува во неколку етапи.

О. Претходни дефиниции и формулирање на основниот резултат

Нека A е непразно множество, M непразно множество од природни броеви, и за секој елемент $n \in M$ нека е определена една $n+1-$арна *операција*:

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \to (a_0\, a_1 \dots a_n) \tag{1}$$

во A. Во *алгебрата* A се воведува поимот за *сложен производ* на вообичаениот начин. Имено, за секој елемент $a \in A$ се става:

$$\Pi\,(a) = a \tag{2}$$

и се вели дека Π е *производ од нулти ред*. Потоа, ако $n \in M$, и ако:

$$a_0 = \Pi_0\,(a_{00}\, a_{01} \dots a_{0k_0}),\ a_1 = \Pi_1\,(a_{10} \dots a_{1k_1}), \dots, a_n = \Pi_n\,(\dots a_{nk_n}),$$

тогаш производот:

$$\Pi = (\Pi_0\, \Pi_1 \dots \Pi_n) \tag{3}$$

се определува со:

$$\Pi\,(a_{00} \dots a_{0k_0} \dots a_{n0} \dots a_{nk_n}) = (a_0\, a_1 \dots a_n). \tag{4}$$

Ако притоа производите $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_n$ имаат *редови* соодветно $r_0, r_1, \dots, r_n$, тогаш за Π ќе велиме дека има *ред* $1 + r_0 + r_1 + \dots + r_n$. Да уочиме дека ако $\Pi\,(b_0\, b_1 \dots b_k)$ е сложен производ во алгебрата A тогаш k може да се претстави како збир $k = n_1 + n_2 + \dots + n_r$, каде што $n_1, n_2, \dots, n_r \in$ M.

За алгебрата A велиме дека е *М-асоцијатив*, ако

$$\Pi'\,(a_0\, a_1 \dots a_k) = \Pi''\,(a_0\, a_1 \dots a_k),$$

за било кои елементи $a_0, a_1, \dots, a_k \in A$ и производи Π', Π'', т.е. ако важи *општиот асоцијативен закон*. Во тој случај, имајќи предвид дека производот $\Pi(a_0\, a_1 \dots a_k)$ е еднозначно определен со низата $a_0, a_1, \dots, a_k \in A$, ќе пишуваме:

$$\Pi\,(a_0\, a_1 \dots a_k) = (a_0\, a_1 \dots a_k). \tag{5}$$

Ако A е M-асоцијатив и ако сите елементи од M се делат со m при што $m \in M$, тогаш велиме дека A е *m-асоцијатив*.

За M-асоцијативот A велиме дека е *М-група*, ако

$$(\forall\, n \in M)\,(\forall\, a_1, \dots, a_n \in A)\,(A\, a_1 \dots a_n) = (a_1 \dots a_n A) = A. \tag{6}$$

Подмножеството B од асоцијативот A се вика *лев идеал* ако

$$(\forall\, n \in M)\,(AA \dots A\, B) = (A^n\, B) \subset B. \tag{7}$$

Потребен ни е и поимот за *делумен М*-асоцијатив. Имено, A е *делумен М-асоцијатив*, ако за секој $n \in M$, во A е определена *делумна* $n+1-$ арна операција $(\dots)$ така што важи општиот асоцијативен закон, кој што сега гласи: *Ако еден од производите* $\Pi'(a_0 \dots a_k)$, $\Pi''(a_0 \dots a_k)$ *постои, тогаш постои и другиот и притоа тие се еднакви.*

Ако A е M_1-асоцијатив, а B M_2-асоцијатив, при што $M_1 \subset M_2$, тогаш за пресликувањето $\varphi : A \to B$ велиме дека е *хомоморфизам*, ако:

$$(\forall\, n \in M_1)\,(\forall\, a_0, \dots, a_n \in A) \quad (a_0 \dots a_n)\,\varphi = (a_0\,\varphi \dots a_n\,\varphi). \tag{8}$$

Како што е во обичај, *полугрупата од трансформации* на едно множество J ќе ја означуваме со T_J.

Сега ќе го формулираме главниот резултат на работава.

ТЕОРЕМА. (I) *Нека M е множество природни броеви, а m делител на сите природни броеви што припаѓаат на M. Потоа, нека G е m-група, J непразно множество, P делумен M-асоцијатив, и нека $\varphi : p \to p\varphi$ е хомоморфизам од P во G, а $\xi : p \to \xi_p$ од P во T_J, таков што ако $n \in M$ и $(p_0\, p_1 \dots p_n)$ не е определен во P, тогаш $\xi_{p_0}\, \xi_{p_1} \dots \xi_{p_n}$ е константа. Исто така претпоставуваме дека $G \times J \cap P = \varnothing$. Нека ставиме $A = G \times J \cup P$*

и нека ги прошириме φ *и* ξ *така што*:

$$(\forall x \in G,\ i, j \in J)\ (x, i)\,\varphi = x,\ j\,\xi_{(x,i)} = i. \tag{9}$$

Во A *определуваме „производ"* $(a_0\, a_1 \ldots a_n)$ *за секои* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ *и* $n \in M$ *на следниов начин*:

(*i*) $p = (a_0\, a_1 \ldots a_n)$ *во* $P \Rightarrow p = (a_0\, a_1 \ldots a_n)$ *во* A; (10)

(*ii*) *ако* $(a_0\, a_1 \ldots a_n)$ *не е определен во* P, *тогаш во* A *тој се определува со*:

$$(a_0\, a_1 \ldots a_n) = ((a_0\varphi\, a_1\varphi \ldots a_n\varphi),\ i\ \ \xi_{a_0}\xi_{a_1} \ldots \xi_{a_n}), \tag{11}$$

каде што i *е произволен елемент од* J.

Добиената алгебра A *ќе ја означуваме со* $[G, J;\ P;\ \varphi, \xi]$; *таа ги има следниве две особини*:

1) $[G, J;\ P;\ \varphi, \xi]$ *е* M*-асоцијатив*;

2) *За секој* $i \in J$, *множеството* $G_i = \{(x, i) \mid x \in G\}$ *е лев идеал и* M*-подгрупа на* A, *а освен тоа секој лев идеал што е и* M*-подгрупа е од облик* G_j *за некој* $j \in J$.

(II) *Нека* A *е* M*-асоцијатив, при што* m *е најголемиот заеднички делител на елементите од* M. *Ако некој лев идеал на* A *е и* M*-подгрупа, тогаш* A *е изоморфен со* M*-асоцијатив од облик* $[G, J;\ P;\ \varphi, \xi]$.

Доказот на теоремата ќе го спроведеме во неколку етапи.

1. Доказ на првиот дел од теоремата

За да покажеме дека со (*i*) и (*ii*) е определена алгебра, треба да покажеме дека десната страна на (11) не зависи од изборот на елементот $i \in J$. Ако $a_0, \ldots, a_n \in P$ тоа следува од фактот што тогаш трансформацијата $\xi_{a_0}\xi_{a_1} \ldots \xi_{a_n}$ е константа. Да претпоставиме дека барем еден од елементите a_ν не е во P, и нека k е најголемиот број таков што $a_k = (x, j) \in G \times J$. Тогаш, според (9) ќе имаме:

$$i\,\xi_{a_0}\xi_{a_1} \ldots \xi_{a_n} = j\,\xi_{a_{k+1}} \ldots \xi_{a_n}, \tag{12}$$

па, значи, добиваме дека десната страна на (11) не зависи од i. (За $k=n$, десната страна на (12) е j).

Ќе покажеме дека добиената алгебра е M-асоцијатив. За таа цел, да претпоставиме дека $b = \Pi\,(a_0\, a_1 \ldots a_t)$ е сложен производ во A. Ако $b \in P$, тогаш од (*i*) и фактот што P е делумен M-асоцијатив, следува дека за произволен друг производ $c = \Pi'\,(a_0\, a_1 \ldots a_t)$ имаме $b = c$. Нека $b \notin P$, т.е. $b \in G \times J$. Ќе покажеме дека во овој случај:

$$b = ((a_0\varphi\, a_1\varphi \ldots a_t\varphi),\ i\,\xi_{a_0}\xi_{a_1} \ldots \xi_{a_t}), \tag{13}$$

каде што i е произволен елемент од J. Ако Π има ред 1, тогаш (13) е точно бидејќи се сведува на (11). Нека $t = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, каде што $n_\nu \in M$ и $k \geqslant 1$. Тогаш b може да се претстави во облик:

$$b = \Pi'\,(a_0 \ldots a_{r-1}\,(a_r \ldots a_{r+n})\,a_{r+n+1} \ldots a_t) \tag{13'}$$

за некои $r \in N$, $n \in M$ и производ Π'. Сега се можни следниве два случаја:

$$p = (a_r \ldots a_{r+n}) \in P \tag{14}$$

или

$$(x, j) = (a_r \ldots a_{r+n}) = ((a_r\varphi \ldots a_{r+n}\varphi),\ i\,\xi_{a_r} \ldots \xi_{a_{r+n}}). \tag{14'}$$

Претпоставуваме дека (13) е точно за производот Π'. Ако е (14) точно тогаш имаме:

$$b = ((a_0\varphi \ldots a_{r-1}\varphi\ \ p\varphi \ldots a_t\varphi),\ i\,\xi_{a_0} \ldots \xi_{a_{r-1}}\xi_p \ldots \xi_{a_t}), \tag{15}$$

а

$$b = ((a_0\varphi \ldots a_{r-1}\varphi\ \ x\,a_{r+n+1}\varphi \ldots a_t\varphi),\ j\,\xi_{a_{r+n+1}} \ldots \xi_{a_t}) \tag{15'}$$

во случајот (14′). Ако се има предвид дека $p\varphi = (a_r\varphi \ldots a_{r+n}\varphi)$ во првиот случај, а $x = (a_r\varphi \ldots a_{r+n}\varphi)$, во вториот, добиваме дека и во двата случаја десните страни на (15) и (15′) се свопаѓаат со десната страна на (13).

Со тоа докажавме дека A е M-асоцијатив.

Јасно е дека $G_i = \{(x, i) \mid x \in G\}$ е лев идеал и M-подгрупа од A, за секој $i \in J$. Да претпоставиме сега дека L е непразен лев идеал на A. Ако $a \in G_x J$, тогаш $(a^n L) \subseteq L \cap G \times J$, од што следува дека $L \cap G \times J$ е непразно множество. Ако $a \in G_i \cap L$, тогаш $(G_i^n a) = G_i \subseteq L$, од што, ако се претпостави и тоа дека L е M-подгрупа од A, се добива дека $L = G_i$.

Со тоа го комплетиравме доказот на првиот дел од теоремата.

2. Доказ на вториот дел од теоремата

2.1. Случај кога A е m-асоцијатив. Во овој случај теоремата формулирана во работава се сведува на основниот резултат на работата [6].

2.2. Случај кога A е унија на фамилијата леви идеали што се и M-подгрупи. Да претпоставиме сега дека A е M-асоцијатив, $\{G_i \mid i \in J\}$ фамилија леви идеали на A секој од кои е и M-подгрупа, при што:

$$A = \bigcup_{i \in J} G_i. \tag{16}$$

Јасно е дека $G_i \cap G_j = \varnothing$ или $G_i = G_j$. Затоа ќе претпоставиме дека $G_i \cap G_j = \varnothing$ за $i \neq j$.

Да фиксираме еден елемент $n \in M$ и два елемента $i, j \in J$. Ако $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е неутрален слог на n-групата G_i, т.е. ако

$$(\forall\, x \in G_i)\, (xe_1 e_2 \ldots e_n) = x, \tag{17}$$

тогаш со:

$$(\forall\, y \in G_j)\;\; y\varphi_{ji} = (y\, e_1 e_2 \ldots e_n) \tag{18}$$

е определен изоморфизам од n-групата G_j во n-групата G_i ([5] теорема 1). Да претпоставиме сега дека k е произволен елемент од M, и дека $x_0, x_1, \ldots, x_k \in G_j$. Тогаш имаме:

$$\begin{aligned}(x_0 x_1 \ldots x_k)\, \varphi_{ji} &= (x_0 x_1 \cdots x_k\, e_1 e_2 \ldots e_n) = x_0 x_1 \cdots x_{k-1}\;\, x_k \varphi_{ji}) \\ &= (x_0 x_1 \cdots x_{k-1}\, (e_1 e_2 \ldots e_n\, x_k \varphi_{ji})) \\ &= (x_0 x_1 \cdots x_{k-1}\, \varphi_{ji}\, x_k\, \varphi_{ji}) = \cdots = (x_0 \varphi_{ji}\, x_1 \varphi_{ji} \cdots x_{k-1}\, \varphi_{ji}\, x_k\, \varphi_{ji}),\end{aligned}$$

од што следува дека φ_{ji} е изоморфизам од M-асоцијативот G_j во M-асоцијативот G_i. Да забележиме исто така и дека:

$$\varphi_{ji}\, \varphi_{ir} = \varphi_{jr}. \tag{19}$$

Да земеме сега i_0 да е фиксен елемент од J и да ставиме $G = G_{i_0}$. Го формираме M-асоцијативот $B = G \times J$, така што

$$((x_0, j_0)\,(x_1, j_1) \ldots (x_n, j_n)) = ((x_0 x_1 \ldots x_n),\; j_n), \tag{20}$$

за секои $x_\nu \in G$, $n \in M$, $j_\nu \in J$. Лесно се проверува дека пресликувањето ψ определено со:

$$(\forall\, x \in G_i)\; x\,\psi = (x\, \varphi_{ii_0},\; i) \tag{21}$$

е изоморфизам од A на $B = G \times J$. Затоа, можеме да претпоставиме дека:

$$A = G \times J \tag{22}$$

Нека m е најголемиот заеднички делител на природните броеви што припаѓаат на M. Ако се има предвид фактот што G е M-група и теоремата 2 од работата [4] (стр. 8) заклучуваме дека постои $m+1$-арна операција:

$$(x_0, x_1, \ldots, x_m) \to x_0\, x_1 \ldots x_m \tag{23}$$

во G, таква што G во однос на неа е m-група и притоа:

$$(\forall\, n \in M,\; x_\nu \in G)\; (x_0\, x_1 \ldots x_n) = x_0\, x_1 \ldots x_n. \tag{24}$$

(Десната страна на (24) е осмислена, бидејќи m е делител на n).

Со тоа го докажавме и вториот дел на теоремата за специјалниот случај кога фамилијата леви идеали што се и подгрупи го покриваат асоцијативот.

2.3. Комплетирање на доказот од вториот дел на теоремата. Ќе го разгледаме сега најопштиот случај, а имено ќе претпоставиме дека унијата B од сите леви идеали на A што се и M-подгрупи не го исцрпува целото множество A. Според спроведената дискусија во претходниот дел, можеме да претпосавиме дека $B = G \times J$, каде што G е m-група, а операциите во B се определени со (20). Нека ставиме:

$$P = A \setminus B. \tag{25}$$

Ако се има предвид дека за секој $n \in M$, A е n-асоцијатив, од **2.1** следува дека постои фамилија хомоморфизми $\varphi^{(n)}\colon P \to G$ и $\xi^{(n)}\colon P \to T_J$, такви што:

а) Ако $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$, $n \in M$, но $(a_0 a_1 \ldots a_n) \notin P$, тогаш

$$(a_0\, a_1 \ldots a_n) = (a_0\, \varphi^{(n)}\, a_1\, \varphi^{(n)} \ldots a_n\, \varphi^{(n)},\;\; i\, \xi^{(n)}_{a_0}\, \xi^{(n)}_{a_1} \ldots \xi^{(n)}_{a_n}), \tag{11'}$$

при што на $G \times J$ $\varphi^{(n)}$ и $\xi^{(n)}$ се определени со (9).

б) Ако $p_0, \ldots, p_n \in P$, но $(p_0 \ldots p_n) \notin P$, тогаш $\xi^{(n)}_{p_0}\, \xi^{(n)}_{p_1} \ldots \xi^{(n)}_{p_n}$ е константа.

Ќе покажеме дека $\varphi^{(n)}$ и $\xi^{(n)}$ не зависат од n, а со тоа ќе го комплетираме доказот на теоремата.

Нека $r, s \in M$ и нека $rs = n$. Ако $p \in P, x_1, x_2, \ldots, x_n \in G, i \in J$, тогаш производот $(p(x_1, i)(x_2, i) \ldots (x_n, i))$ е определен во A сметан како r-асоцијатив, а и како s-асоцијатив. Според тоа,

$$(p\varphi^{(r)} x_1 x_2 \ldots x_n, i) = (p(x_1, i)(x_2, i) \ldots (x_n, i)) = (p\varphi^{(s)} x_1 \ldots x_n, i),$$

од што следува дека:

$$(\forall p \in P)\ p\varphi^{(r)} = p^{(s)},\ \text{т. е. } \varphi^{(r)} = \varphi^{(s)}.$$

Исто така:

$$(x_1 \ldots x_n p\varphi, i\xi_p^{(r)}) = ((x_1, i) \ldots (x_n, i)p) = (x_1 \ldots x_n p\varphi, i\xi_p^{(s)}),$$

од што следува:

$$(\forall p \in P, i \in J)\ i\xi_p^{(r)} = i\xi_p^{(s)},\ \text{т. е. } \xi_p^{(r)} = \xi_p^{(s)}.$$

Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата.

3. Неколку забелешки.

Со цел да ги илустрираме добиените резултати, ќе направиме овде неколку забелешки.

3.1 Прашање за егзистенција на М-асоцијативи од облик $[G, J: P: \varphi, \xi]$.

а) Ако $P = \varnothing$, тогаш имаме $[G, J; \varnothing; \varphi, \xi] = G \times J$.

б) Ако P е произволно множество, тогаш можеме да сметаме дека P е делумен M-асоцијатив во кој што ниеден поизвод не е дефиниран. Нека G е m-група, J непразно множество, $\varphi : P \to G$ произволно пресликување, а $(\forall p \in P)\ \xi_p$ нека е константен елемент од J. Тогаш, јасно е дека се исполнети сите услови за да добиеме M-асоцијатив од облик $[G, J; P; \varphi, \xi]$.

в) Нека G е група, J непразно множество, а P M-асоцијатив. Можеме да добиеме M-асоцијатив $[G, J; P; \varphi, \xi]$, ако ставиме, на пример, $(\forall p \in P)\ p\varphi = e,\ i\xi_p = i$, при што e е единицата на групата G.

3.2. М-асоцијативи што се подасоцијативи на полугрупи.

За еден M-асоцијатив A се вели дека е *подасоцијатив на полугрупа*, ако постои полугрупа S таква што $A \subseteq S$ и:

$$(\forall n \in M,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in A)\ (a_0 a_1 \ldots a_n) = a_0 a_1 \ldots a_n. \tag{26}$$

Овој поим е воведен во работата [3]. Во истата работа е наведен пример на M-асоцијатив што не е подасоцијатив на полугрупа, а во работата [4] изнесени неколку класи асоцијативи што се подасоцијативи од полугрупи. Подолу ќе спомeнеме некои од тие резултати.

а) Нека M е непразно множество од природни броеви со најмал елемент m, за кој што се претпоставува дека не е делител на сите елементи од M, и нека n е најмалиот елемент од M што не се дели со m. Потоа, нека претпоставиме дека A се состои од барем три различни елементи $a, b\ c$. За секој $k \in M$ определуваме $\kappa + 1$-арна операција во A на следниов начин:

$$k \neq n \Rightarrow (\forall x_0, x_1, \ldots, x_k \in A)\ (x_0 x_1 \ldots x_k) = a$$
$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq (c, c, \ldots, c) \Rightarrow (x_0 x_1 \ldots x_n) = a$$
$$(c^{n+1}) = b. \tag{27}$$

Не е тешко да се провери дека A е M-асоцијатив. Овој асоцијатив не е подасоцијатив на полугрупа.

б) Секој m-асоцијатив, како и секој M-асоцијатив со лево (или десно) кратење е подасоцијатив од полугрупа. Исто така секоја M-група е M-подгрупа од група. (Да се види [4], стр. 6 и 8).

в) Во врска со а) и б) се наложува прашањето дали постојат M-асоцијативи од облик $[G, J; \mathrm{P}; \varphi, \xi]$ што не се поадсоцијативи од полугрупи. Дека такви асоцијативи постојат се установува лесно. Навистина, ако P е M-асоцијатив што не е подасоцијатив од полугрупа тогаш сигурно ниеден M-асоцијатив од облик $[G; J; P; \varphi, \xi]$ не е подасоцијатив од полугрупа.

Ако е, на пример, $P = \varnothing$, тогаш секој M-асоцијатив $[G, J; P; \varphi, \xi]$ е подасоцијатив на полугрупа, бидејќи, според б), G е M-подгрупа од некоја група H.

3.3. Можност за користење на бинарните полугрупи за испитување на асоцијативите. Овде ќе покажеме како може резултатот од работата [6] да се добие како последица од резултатот на работата [1].

Да претпоставиме дека A е m-асоцијатив за кој што полугрупата S е максимална покривка ([2], стр. 6). Според тоа, имаме:

$$S = AUA^2 U \dots U A^m, \ A^i \cap A^j = \varnothing$$

за $i \neq j$. Ако G е лев идеал на A, а во исто време и m-подгрупа, тогаш лесно се покажува дека

$$F = G U G^2 U \dots U G^m$$

е лев идеал на S, а и подгрупа на S. Според основниот резултат на работата [1] можеме да сметаме дека $S = [H; J; Q; \varphi, \xi]$, при што $F = H \times \{i\}$ за некое $i \in J$. Освен тоа, постои m-подгрупа G_1 на H таква што $G = G_1 \times \{i\}$. Потоа, се покажува дека $G_1 \times J \subseteq A$, од што лесно се добива дека $A = [G_1, J; P; \varphi_1, \xi_1]$ каде што $P = A \setminus G_1 \times J$, а φ_1 и ξ_1 се рестрикциите од φ односно ξ на P.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ѓ. Чупона, Полугрупи во кои некој идеал е група, Год. Зборн. Прир. мат. факултет Скопје, Секц. А Кн. 14 (1963) 15—17.

[2] Полугрупи генерирани од асоцијативи, Год. Зборн. Прир. мат. фак. Скопје, Секц. А Кн. 15 (1964) 5—25.

[3] За асоцијативите, МАНУ Прилози I 1, Одд. Прир. мат. науки (1969) 9—20.

[4] Асоцијативи со кратење, Год. Зборн. Прир. мат. фак. Секц. А Кн. 19 (1969) 5—14.

[5] Б. Трпеновски, За некои n-полугрупи што се унии на n-групи, Билт. Друшт. матем. физ. СРМ 16 (1965) 11—17.

[6] Ж. Мадевски, n-Асоцијативи кај кои некој лев идеал е n-група, Год. Зборн. Прир. мат. фак. Скопје, Секц. А Кн. 17—18 (1966—67) 5—10.

M-ASSOCIATIVES IN WHICH SOME LEFT IDEALS ARE M-SUBGROUPS

Summary

The purpose of this paper is to describe the class of M-associatives containing left ideals which are M-subgroups.

At first we give some preliminary definitions.

Let A be a nonemptry set, M a nonempty set of positive integers, and for each $n \in M$, an $n+1$—ary *operation*

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \to (a_0 \, a_1 \dots a_n) \tag{1}$$

be defined in A. The notion of *continued product* is defined in the usual way. Namely, the product with the *length* 0 is defined by:

$$(\forall \, a \in A) \ \Pi \, (a) = a. \tag{2}$$

If $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_n$ are products with lengths $k_0, k_1, \dots, k_n$, where $n \in M$, and if:

$$a_0 = \Pi_0 \, (a_{00} \dots a_{0k_0}), \ a_1 = \Pi_1 \, (a_{10} \dots a_{1k_1}), \dots, a_n = \Pi_n (\dots a_{nk_n}),$$

then the product $\Pi = (\Pi_0 \Pi_1 \dots \Pi_n)$ with length $k = k_0 + k_1 + \dots + k_n$ is defined by:

$$\Pi \, (a_{00} \dots a_{0k_0} \dots a_{n0} \dots a_{nk_n}) = (a_0 \, a_1 \dots a_k). \tag{3}$$

The algebra A is said to be an *M-associative* if for two arbitrary products Π' and Π'' with the same length k we have:

$$\Pi' \, (a_0 \, a_1 \dots a_k) = \Pi'' \, (a_0 \, a_1 \dots a_k) \tag{4}$$

for all $a_0, a_1, \dots, a_k \in A$.

An algebra P is said to be a *partial M-associative* if, for each $n \in M$, a *partial* $n+1$—ary *operation* is defined in P, such that, *if one of the products in* (4) *exists, the other one exists too, and then the equation* (4) *holds.*

Let A be an M-associative and $[M]$ the additive semigroup of positive integers generated by M. If $k \in M$ then there is a product Π with length k, and all such products induce the same $k+1$-ary operation on A; this operation will be denoted by $(a_0 \, a_1 \dots a_k)$. Thus,

$$(\forall \, a_0, \dots, a_k \in A) \ \Pi \, (a_0 \, a_1 \dots a_k) = (a_0 \, a_1 \dots a_k). \tag{5}$$

If $M_1 \subseteq [M]$, A may be assumed to be an M_1-associative induced by the given M-associative. The same is also true for partial associatives.

Let A be a partial M_1-associative, and B a partial M_2-associative, where $M_1 \subseteq [M_2]$. A mapping $\varphi : A \to B$ is said to be a homomorphism, if it is a homomorphism from the given M_1-associative A into the M_1-associative B induced by the given M_2-associative B. The set of the all such homomorphisms

will be denoted by Hom (A, B).

An M-associative A is said to be an *M-group* if:

$$(\forall n \in M, a_1, a_2, \ldots, a_n \in A)\ (Aa_1 \ldots a_n) = (a_1 \ldots a_n A) = A. \tag{6}$$

An M-associative A is said to be an *m-associative* if $M = \{m, 2m, \ldots, tm, \ldots,\}$ i. e. if $m \in M$ and if m is a divisor of every element n of M.

A subset B of an M-associative is said to be a *left ideal* if:

$$(\forall n \in M)\ (AA \ldots A\ B) = (A^n B) \subseteq B. \tag{7}$$

An M-associative A is said to be a *subassociative of a semigroup*, if there is a semigroup S, such that $A \subseteq S$, and

$$(\forall n \in M, a_0, a_1, \ldots, a_n \in A)\ (a_0 \ldots a_n) = a_0 \ldots a_n. \tag{8}$$

Now we can state the results of this paper.

THEOREM. (*I*) *Let G be an M-associative, J a nonempty set, and P a partial M-associative, such that $G \times J \cap P = \emptyset$. Denote by A the set $G \times J \cup P$, and by T_J the semigroup of transformations of the set J. Let $\varphi \in$ Hom (P, G), and $\xi \in$ Hom (P, T_J), such that if $p_0 \ldots, p_n \in P$, $n \in M$, but $(p_0\, p_1 \ldots p_n)$ is not defined in P then $\xi_{p_0} \xi_{p_1} \ldots \xi_{p_n}$ is a constant. Extend the mappings φ and ξ by:*

$$(\forall x \in G,\ i, j \in J)\ (x, i)\,\varphi = x,\ j\,\xi_{(x,i)} = i. \tag{9}$$

For each $n \in M$, an $n+1$-ary operation is defined in A by:

$$p = (p_0\, p_1 \ldots p_n) \text{ in } P \Rightarrow p = (p_0\, p_1 \ldots p_n) \text{ in } A; \tag{10}$$

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \in A\ \&\ (a_0\, a_1 \ldots a_n) \notin P \Rightarrow$$

$$(a_0 \ldots a_n) = (a_0 \varphi\, a_1 \varphi \ldots a_n \varphi,\ i\, \xi_{a_0} \xi_{a_1} \ldots \xi_{a_n}), \tag{11}$$

where i is an arbitrary element of J.

Then we have:

a) A is an M-associative which will be denoted by $[G, J; P; \varphi, \xi]$.

b) For each $i \in J$, $G_i = \{(x, i) \mid x \in G\}$ is a left ideal of A, and G_i is isomorphic with the given M-associative G.

(*II*) *Let A be an M associative, and G a left ideal of A which is also an M-subgroup. Then we have:*

c) A is ismorphic with an M-associative of the form $[G, J; P; \varphi, \xi]$.

d) If m is the greatest common divisor of the elements of M, then there is an m-group G which induces the given M-group.

e) If A is the union of the collection of left ideals which are M-subgroups, then A is a subassociative of a semigroup.

EXAMPLES

1) If P is an arbitrary nonempty set it may be considered as a partial M-associative assuming that neither of the products $(p_0 \ldots p_n)$ is defined. Then, if G is an M-associative, J a non-empty set, $\varphi : P \to G$ an arbitrary mapping from P into G, and if, for each $p \in P$, ξ_p is a constant, then we get an M-associative of the forme $[G, J; P; \varphi, \xi]$.

2) Let G be a group, J a non-empty set, and P an M-associative. By putting: $(\forall p \in p)\ p\varphi = e$, $\xi_p = 1_J$ (where e is the neutral element of the group, and 1_J is the identity mapping of J) we get an M-associative $[G, J; P; \varphi, \xi]$.

3) Let m be the minimal positive integer belonging to M, and n the minimal positive integer of M such that m is not a divisor of n. (It is assumed that such an integer n exists.) Let A be a set with at least three different elements a, b, c. For each element $k \in M$, we define a $k+1$-ary operation on A in the following way:

$$n \neq k \Rightarrow (\forall x_0, \ldots, x_k \in A)\ (x_0 \ldots x_k) = a$$

$$(x_0, \ldots, x_n) \neq (c, \ldots, c) \Rightarrow (x_0 \ldots x_n) = a$$

$$(c \ldots c) = (c^{n+1}) = b. \tag{12}$$

It is easy to see that A is an M-assocative which is not an M-subassociative of a semigroup.

4) If P is an M-associative which is not a subassociative of a semigroup, then neither M-associative $[G, J; P; \varphi, \xi]$ is a subassociative of a semigroup.

5) Every: a) m-associative, b) M-group, c) M-associative with left (or right) cancellation — is a subassociative of a semigroup. ([1] p. 6; [4] pp